פרק 8

קטבים, אפסים ותגובה של מערכת לק"ב

גישה חשובה לתכנון וניתוח מערכות מחלקת את הבעיה לשלבים: תכנון מיקום הקטבים והאפסים של המערכת כדי שתענה לדרישות, ולאחר מכן תכנון מערכת אשר יש לה את הקטבים והאפסים הרצויים. בפרק זה נלמד להבין את משמעות מיקום הקטבים והאפסים מבחינת השפעתם על התנהגות המערכת.

אם תפקיד המערכת הוא לקבל אות כניסה (למשל חשמלי) ולהמיר אותו לאות מוצא מכני, או לאות חשמלי מוגבר, אזי נרצה שמוצא המערכת "יעקוב" אחרי אות הכניסה. כדי להבין מה השפעת מערכות שונות במובן זה, נשים בפרק זה דגש על התגובה למדרגה. הממדים אשר יגדירו את התנהגות המערכת יוגדרו בסעיף 8.2. באופן כללי הם עוסקים בשאלה כמה מהר מגיבה המערכת לכניסת מדרגה: כמה זמן לוקח עד שהתגובה קרובה ל-1 (גודל הכניסה), מהו גודל התנודות והזמן עד שהן דועכות וכו'.

8.1 מערכת מסדר ראשון

נתבונן במערכת הפשוטה ביותר---מערכת מסדר ראשון ללא אפסים.

דוגמה 8.1.1 נתונה מערכת אשר פונקצית התמסורת שלה היא

$$H(s) = \frac{1}{s+\lambda} \quad ROC_H = \{\Re e\,(s) > -\lambda\}\,. \tag{8.1.1}$$

נניח כי $\lambda > 0$ (ממשי), כלומר הקוטב הוא ב-$(-\lambda)$ שהוא שלילי. התגובה להלם היא אם כן

$$h(t) = e^{-\lambda t}u(t)\,. \tag{8.1.2}$$

התגובה למדרגה היא, עבור $t \geq 0$,

$$S(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \tag{8.1.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau \tag{8.1.4}$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-\lambda\tau}\, d\tau \tag{8.1.5}$$

$$= -\left.\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau}\right|_{0}^{t} \tag{8.1.6}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) . \tag{8.1.7}$$

כיוון ש-$\lambda > 0$ תגובת ההלם שואפת ל-0 עבור t גדול, ואילו תגובת המדרגה שואפת לקבוע---במקרה זה ל-$\frac{1}{\lambda}$. ככל ש-λ גדול יותר, כך תגובת המערכת מהירה יותר במובן שהמערכת ללא כניסה (לאחר תום השפעת ההלם) שואפת למצב מנוחה שהוא תגובה 0 במהירות גדולה יותר, ולמצב "יציב"---כלומר ללא שינויים---במהירות גדולה יותר במקרה של כניסת מדרגה. נגדיר למשל את זמן התגובה τ כזמן הדרוש עד שהתגובה למדרגה תתקרב עד כדי $1/e$ לערך הסופי (ב-t גדול). זה יקרה כאשר $e^{-\lambda\tau} = e^{-1}$ או

$$\tau = \frac{1}{\lambda} . \tag{8.1.8}$$

אם למערכת יש גם אפס כלשהוא, כלומר

$$H(s) = \frac{s+a}{s+\lambda} = \frac{a}{s+\lambda} + \frac{s}{s+\lambda} \tag{8.1.9}$$

אזי נקבל כי

$$h(t) = ae^{-\lambda t}u(t) + \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}u(t)\right) \tag{8.1.10}$$

$$= ae^{-\lambda t}u(t) + \left(-\lambda e^{-\lambda t}u(t) + \delta(t)\right) \tag{8.1.11}$$

$$= (a-\lambda)e^{-\lambda t}u(t) + \delta(t) . \tag{8.1.12}$$

עבור $a = \lambda$ נקבל שתגובת ההלם היא דלתה. בכל מקרה אחר, שוב התגובה לכניסת דלתה דועכת (עדיין בהנחה ש-$\lambda > 0$) במהירות התלויה ב-λ. התגובה למדרגה במקרה זה מתחילה בערך 1 (בגלל ה- δ) ומתקרבת לערך הסופי במהירות הנקבעת על ידי λ.

כיוון שניתן לרשום תגובת הלם של מערכת כללית יותר (לפחות כל מערכת המתוארת על ידי מישוואה דיפרנצאלית כזו שהפולינום האפייני הוא מסדר שאינו קטן מסדר הנגזרת הגבוהה ביותר בכניסה) כסכום של בטויים כאלו (על ידי פרוק לשברים חלקיים), המשמעות של הקטבים נשארת כבדוגמה---הם קובעים את קצב הדעיכה של התגובה (לדלתה) או קצב ההתכנסות שלה לערך היציב. ככל שמיקום הקוטב נמצא שמאלה יותר במישור המרוכב (כלומר חלקו הממשי שלילי יותר) כך המערכת מתייצבת במהירות גדולה יותר. בהמשך נפרט הסבר זה.

8.2 מערכת מסדר שני

נתבונן במשוואה דיפרנציאלית מסדר שני

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = x \tag{8.2.1}$$

כאשר כל המקדמים הם ממשיים. אפסי הפולינום האפייני הם

$$\frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}\right) . \tag{8.2.2}$$

אם $c \leq 0$ או באופן כללי יותר אם $b^2 \geq 4c$ אזי השרשים הם ממשיים, והניתוח של הסעיף הקודם תקף. כלומר ניתן לרשום את תגובת ההלם (או תגובת המדרגה) כסכום של תגובות לשתי מערכות מסדר ראשון (כל אחת עם שורש אחד מהשניים הממשיים), ולכן המסקנות זהות. נבחן לכן את המקרה בו השרשים הם מרוכבים. בפרט, אם השרשים מרוכבים אזי $c > 0$. על כן נוכל להגדיר משתנה ממשי וחיובי ω_n ומשתנה ממשי ξ שהגדרתם היא

$$\omega_n^2 = c \tag{8.2.3}$$

$$2\xi\omega_n = b\,. \tag{8.2.4}$$

התחום המעניין אותנו הוא $b^2 < 4c$ כלומר

$$4\xi^2\omega_n^2 < 4\omega_n^2 \to \xi^2 < 1\,. \tag{8.2.5}$$

אם כן, נבחן משוואה דפרנציאלית מסדר שני מהצורה

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 x \tag{8.2.6}$$

כאשר ω_n חיובי ו-ξ ממשי ומקיים $|\xi| < 1$. (המקדם של x מיועד לפשט מעט את הביטויים). נשים לב כי תאור זה אינו מתאים לכל משוואה לינארית מסדר שני. בנוסף, למרות שהעניין שלנו הוא במקרה $|\xi| < 1$, המשוואה מוגדרת היטב לכל ערך של ξ. נחשב את תגובת התדר על ידי ביצוע התמרת פוריה:

$$(j\omega)^2Y(\omega) + 2\xi\omega_n j\omega Y(\omega) + \omega_n^2 Y(\omega) = \omega_n^2 X(\omega) \tag{8.2.7}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} \tag{8.2.8}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)} \tag{8.2.9}$$

$$c_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{8.2.10}$$

$$c_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\,. \tag{8.2.11}$$

בתנאים שלנו על ξ נקבל כצפוי זוג צמוד של שרשים מרוכבים. את תגובת התדר נוח לרשום בצורה

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}\,. \tag{8.2.12}$$

על ידי פירוק פונקצית התמסורת

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{8.2.13}$$

לשברים חלקיים אפשר לקבל את תגובת ההלם: אם מקדם השיכוך מקיים $|\xi| < 1$ מקבלים, לאחר מעט אלגברה

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right) u(t)\,. \tag{8.2.14}$$

חישוב תגובת המדרגה ארוך יותר, אולם חישוב ישיר נותן

$$s(t) = (h * u)(t) \tag{8.2.15}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left[\frac{e^{j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t}}{c_2} - \frac{e^{-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t}}{c_1} \right] \right\} u(t) \tag{8.2.16}$$

$$= \left\{ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left[\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta\right] \right\} u(t)\,. \tag{8.2.17}$$

(8.2.18)

כאשר $\theta = \cos^{-1}(\xi)$. ברור מנוסחאות אלו כי עבור שיכוך קטן (ξ קטן) התנודות הן בקצב בערך ω_n. לעומת זאת עבור שיכוך גדול ($|\xi| \approx 1$) קצב הדעיכה הוא ω_n והתנודות הן איטיות. בנוסף, תגובת המדרגה יכולה להיות שלילית עבור ערכים מסויימים של t: במקרה זה ערך התגובה עולה על ערך הכניסה וקבלנו תופעה של overshoot.

עבור מערכת מסדר שני אנו מקבלים את שתי התופעות העיקריות בתגובת מדרגה: קצב התכנסות לערך הסופי ותנודות. נגדיר אם כן מספר מדדים המתארים התנהגות זו באופן כמותי. נניח שהמערכת יציבה כך שתגובת המדרגה היא אות חסום, ונניח שעבור t גדול תגובת המדרגה שואפת לערך סופי אשר נסמן ב- y_{ss} (steady state). זהו המצב במערכת מסדר שני המתוארת בסעיף זה, ובלבד ש-$\xi > 0$. נגדיר כעת

- t_r - זמן העליה (Rise time) הוא הזמן עד שהתגובה מגיעה לערך של 90% מ-y_{ss}.
- t_p - הזמן לשיא (peak) הוא הזמן בו מתקבל הערך המכסימלי של התגובה.
- OS - החריגה למעלה (overshoot) היא החריגה המרבית מעל לערך הסופי y_{ss}. לרוב מבוטא באחוזים.
- t_s - זמן ההתייצבות (settling time) הוא הזמן אשר ממנו והלאה התגובה מתייצבת בתוך "צינור" נתון סביב הערך הסופי. רוחב מקובל הוא אחוזים בודדים: 1%, 2% או 5%, בהתאם לדיוק הנדרש מהמערכת.
- e_{ss} - שגיאת המצב המתמיד, מוגדרת כ-$1 - y_{ss}$ כלומר השגיאה ביחס הערך של הכניסה - מדרגה.

דוגמה 8.2.1 עבור המערכת (8.1.1) אפשר לחשב את t_r בצורה הבאה:

$$e^{-\lambda t_r} = 0.1 \tag{8.2.19}$$

$$t_r = -\frac{\log 0.1}{\lambda} \tag{8.2.20}$$

כאשר הלוגריתם הוא על הבסיס הטבעי. כמובן ש-t_p הוא אין סופי שכן התגובה עולה בצורה מונוטונית. החריגה OS היא 0 מאותה סיבה. חישוב זמן ההתיצבות זהה לחישוב זמן העליה: עבור ערך שגיאה של α (אשר מקבל את הערכים $0.01, 0.02$ או 0.05)

$$e^{-\lambda t_s} = \alpha \tag{8.2.21}$$

$$t_s = -\frac{\log \alpha}{\lambda}\,. \tag{8.2.22}$$

לבסוף, $e_{ss} = 0$.

דוגמה 8.2.2 עבור המערכת מסדר שני (8.2.6) נניח תחילה ש-$\xi > 0$. אם $\xi^2 > 1$ התנהגות המערכת (לפחות מבחינה איכותית) דומה למערכת מסדר ראשון, שכן לא תהיינה תנודות. בתחום זה של הערכים נאמר שהמערכת היא בריסון יתר (*overdamped*). במצב זה למערכת שני קטבים ממשיים אך שונים בצד שמאל של המישור המרוכב. המעבר ממצב זה להתנהגות הכוללת תנודות הוא כאשר $\xi^2 = 1$: מצב זה נקרא ריסון קריטי ובמקרה זה למערכת זוג קטבים ממשיים זהים בצד שמאל של המישור המרוכב. אם $\xi < 1$ אזי תהיינה תנודות ואנו במצב תת ריסון (*underdamped*). במקרה זה למערכת זוג קטבים מרוכבים (צמודים) בצד שמאל של המישור המרוכב. המערכת בלתי מרוסנת אם $\xi = 0$ ובמקרה זה התגובה היא מחזורית. במקרה זה למערכת זוג קטבים מדומים (צמודים) על הציר המדומה של המישור המרוכב.

לבסוף, אם $\xi < 0$ המערכת אינה יציבה והקטבים הם בצד ימין של המשור המרוכב. תנודות תהיינה כל עוד $\xi^2 < 1$.

8.3 מפת קטבים ואפסים, תגובה במישור הזמן

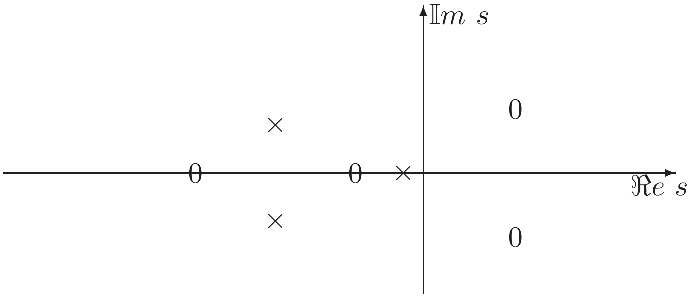
נשים לב כי כל מערכת המתוארת על ידי מד"ר, ובצורה שקולה כל מערכת בעלת פונקצית תמסורת רציונלית ניתן לתאר בצורה

$$H(s) = C\,\frac{\prod_{n=1}^{N}(1+s/\alpha_n)}{\prod_{m=1}^{M}(1+s/\beta_n)} = C'\,\frac{\prod_{n=1}^{N}(s+\alpha_n)}{\prod_{m=1}^{M}(s+\beta_n)} \tag{8.3.1}$$

כאשר אפסי המערכת הם $(-\alpha_n)$ וקטבי המערכת הם $(-\beta_m)$. לכן ניתן לתאר את המערכת בעזרת הקבוע C ובעזרת שרטוט-מפת קטבים ואפסים-המתאר את מיקום הקטבים והאפסים של המערכת.

בשרטוט זה זוג אפסים צמודים מרוכבים בצד ימין של המישור המרוכב, ושאר הקטבים והאפסים בצד שמאל. הם כוללים קוטב ממשי, שני אפסים ממשיים וזוג קטבים צמודים (מרוכבים).

שאלה: כיצד משפיע כל אחד מהקטבים והאפסים על תגובת המערכת, והאם יש קטבים המשפיעים יותר?



איור 8.1: מפת קטבים ואפסים

כדי לחקור זאת נתבונן שוב במערכת מסדר שני עם פונקציית תמסורת

$$T_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\ . \tag{8.3.2}$$

כעת נוסיף למערכת אפס בנקודה $(-a)$ ונקבל מערכת חדשה

$$T(s) = T_0(s) + \frac{s}{a}T_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\left(1 + \frac{s}{a}\right)\ . \tag{8.3.3}$$

אם נרשום זאת בצורה

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{s}{a}\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{8.3.4}$$

אזי ברור מהלינאריות כי התגובה היא התגובה למדרגה של T_0, בתוספת הנגזרת של תגובה זו (כפול קבוע). כלומר, אם נסמן את התגובה של T_0 למדרגה ב-$s(t)$ אזי התגובה למדרגה של המערכת T היא

$$y(t) = s(t) + \frac{1}{a}\dot{s}(t)\,. \tag{8.3.5}$$

הבה נראה כי התגובה היא עדיין מהצורה

$$y(t) = \left[1 + A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}\right] u(t)\ . \tag{8.3.6}$$

כדי לראות זאת נציב את (8.2.15)--(8.2.17) במשוואה (8.3.5), ונשים לב שמכיוון שמדובר בפונקצית תמסורת עבורה סדר המונה קטן ממש מסדר המכנה, תגובת המדרגה אינה יכולה להכיל δ: כלומר המקדמים הם כאלו שנגזרת הדלתה מתאפסת (זאת ניתן לראות גם מאיזון הלמים).

המסקנה היא שתוספת האפס משפיעה על המקדמים, אך לא על קבועי הזמן λ_1, λ_2. השינוי במקדמים יגרום כמובן שינוי במדדים שהגדרנו (חריגה וכו') אולם במקרה היציב לא ישפיע על הערך הסופי.

אם המערכת היא יציבה, כלומר הקטבים נמצאים בצד שמאל של המישור המרוכב, אזי אפשר לראות מהביטוי הכללי לתגובת המדרגה (תוך שימוש במשפטי ערך סופי וערך התחלתי) ש-$s(t)$ עולה עבור t קטן. לכן הנגזרת היא חיובית, ואם $a > 0$ (כלומר האפס שהוספנו הוא בצד שמאל של המישור המרוכב) גם התגובה של T עולה בזמנים קצרים. לעומת זאת אם $a < 0$ אזי הנגזרת יורדת, ונקבל שהתגובה למדרגה מתחילה בירידה אל מתחת לאפס, ורק אחר כך עליה. במובן זה יש שוני מהותי בין הוספת אפס בצד שמאל של המישור המרוכב (מערכת minimum phase) לבין הוספת אפס בצידו הימני של המישור המרוכב.

בנוסף ברור מהביטוי שקיבלנו כי ככל ש-a גדול יותר, כלומר ככל שהאפס נמצא רחוק יותר בצד שמאל של המישור המרוכב, כך תהיה השפעתו קטנה יותר. ולהיפך, לאפס קרוב לראשית תהיה השפעה גדולה, לפחות בזמנים קצרים. נשים לב כי תוספת אפס שני תגרום לכך שסדר המונה שווה לסדר המכנה, וכעת יהיה שינוי מהותי בהתנהגות המערכת.

כיצד משפיעה הוספת קוטב נוסף? נגדיר כעת

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{1+s/\beta} \ . \tag{8.3.7}$$

כעת אם נעשה פירוק לשברים חלקיים נקבל שני אברים המתאימים לקטבים המקוריים (עם מקדמים אחרים) ובנוסף ביטוי מהצורה

$$\frac{A_3}{1+s/\beta} \ . \tag{8.3.8}$$

במישור הזמן התמרה הפוכה תיתן ביטוי מהצורה

$$y(t) = \left[B_0 + B_1 e^{-\lambda_1 t} + B_2 e^{-\lambda_2 t} + B_3 e^{-\beta t}\right] u(t) \ . \tag{8.3.9}$$

נניח ש-$\beta > 0$ והמערכת יציבה: עדיין הקצב שבו מתכנסת התגובה למצב היציב יכול להיות מושפע בצורה מהותית על ידי β. זה יקרה אם $|\Re e\, \beta|$ קטן מ- $\xi\omega_n$. כלומר, הקוטב הקרוב יותר לציר המדומה ישפיע בצורה מהותית יותר על קצב ההתכנסות. אם לעומת זאת β הוא בעל חלק ממשי גדול, ההשפעה תהיה מועטה.

ניתוח דומה ניתן לעשות עבור מערכות מסדר גבוה יותר, דרך מפת הקטבים והאפסים:

כל עוד סדר המונה קטן ממש מסדר המכנה, ההשפעה של האפסים היא על ההתנהגות ב-t קטן בלבד, והם אינם משפיעים על קצב ההתכנסות.

הקטבים הקרובים לציר המדומה הם המשפיעים בצורה מהותית על קבועי הזמן של המערכת.

8.4 קטבים אפסים הגבר ופאזה

נתאר כעת ביתר פירוט את ההגבר והפאזה של תגובת התדר. נניח שנתונה פונקציית תמסורת $H(s)$ עבורה $j\omega$ נמצא בתחום ההתכנסות. (נניח כי H היא פונקציה רציונלית---כפי שקורה כאשר המערכת מתוארת על ידי מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים). נזכר כי האות ההרמוני $e^{j\omega_0 t}$ הוא אות עצמי של המערכת. כלומר התגובה לכניסה כזו היא

$$\begin{aligned} y(t) &= H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} && (8.4.1)\\ &= c\frac{P(j\omega_0)}{Q(j\omega_0)}e^{j\omega_0 t} && (8.4.2)\\ &= c\frac{\prod_{i=0}^{M}(j\omega_0+\beta_i)}{\prod_{i=0}^{N}(j\omega_0+\alpha_i)}e^{j\omega_0 t} && (8.4.3)\end{aligned}$$

כאשר רשמנו את פולינום המונה ופולינום המכנה כמכפלה לפי מיקום שורשי המונה $\{-\beta_i\}$ והמכנה $\{-\alpha_i\}$ בהתאמה. כמובן שאנו מניחים, כרגיל, שפונקצית התמסורת היא לאחר צמצום כלומר אין גורם משותף

למונה ולמכנה. לכן $\{-\alpha_i\}$ הם קטבי המערכת ו-$\{-\beta_i\}$ הם אפסי המערכת. נשים לב כי השתמשנו בקבוע אחד c כדי לנרמל את שני הפולינומים כך שהמקדם הגבוה ביותר שלהם יהיה שווה 1. נרשום את המספר המרוכב $j\omega_0 + \alpha_i$ בצורה פולרית, כלומר לפי גודל וזוית, ונעשה זאת גם עבור האפסים. כלומר נרשום

$$j\omega_0 + \beta_i = |j\omega_0 + \beta_i| e^{\phi_i^z} \tag{8.4.4}$$

$$j\omega_0 + \alpha_i = |j\omega_0 + \alpha_i| e^{\phi_i^p} \; . \tag{8.4.5}$$

כמובן שהפאזה ϕ_i^z של האפס ה-i תלויה בתדר ω_0, וכמוה גם הפאזה ϕ_i^p של הקוטב ה-i-י. כעת נוכל לרשום את תגובת התדר כך:

$$H(j\omega_0) = c\,\frac{\prod_{i=0}^{M}(j\omega_0 + \beta_i)}{\prod_{i=0}^{N}(j\omega_0 + \alpha_i)} \tag{8.4.6}$$

$$= |c|\frac{\prod_{i=0}^{M}|j\omega_0 + \beta_i|}{\prod_{i=0}^{N}|j\omega_0 + \alpha_i|} e^{j\measuredangle c + j\sum_{i=1}^{M}\phi_i^z - j\sum_{i=1}^{N}\phi_i^p} \tag{8.4.7}$$

ובפרט, הגודל של תגובת התדר הוא

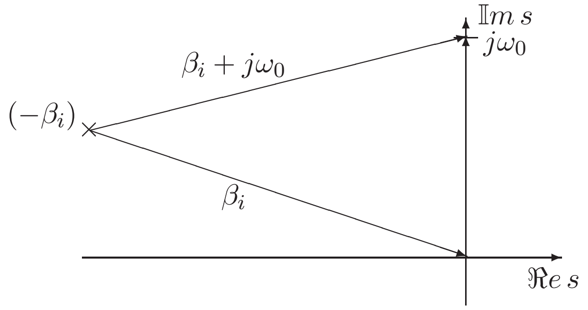
$$|H(j\omega_0)| = |c|\,\frac{\prod_{i=0}^{M}|j\omega_0 + \beta_i|}{\prod_{i=0}^{N}|j\omega_0 + \alpha_i|} \tag{8.4.8}$$

(8.4.9)

והפאזה היא

$$\measuredangle H(j\omega_0) = \measuredangle c + \sum_{i=1}^{M}\phi_i^z - \sum_{i=1}^{N}\phi_i^p \; . \tag{8.4.10}$$

אולם הגודל $|j\omega_0 - (-\beta_i)| = |j\omega_0 + \beta_i|$ הוא בדיוק המרחק בין האפס בנקודה $(-\beta_i)$ לבין הנקודה $j\omega_0$.

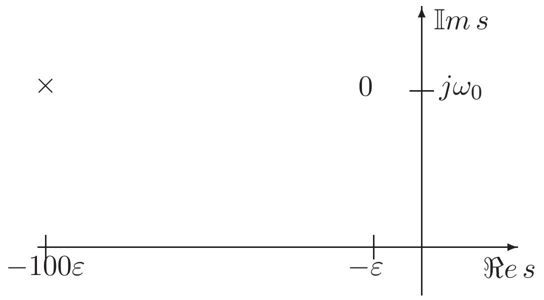


איור 8.2: גודל של גורם מסדר ראשון

כלומר ניתן לחשב את הגודל של תגובת התדר בתדר נתון ω_0 על ידי היחס בין מכפלת המרחקים של אפסי המערכת מהנקודה ω_0 על הציר המדומה, לבין מכפלת המרחקים של קטבי המערכת מהנקודה ω_0 על הציר המדומה.

לצורך חישוב זה דרוש כי $j\omega_0 \in ROC$, אך הוא אינו תלוי בהנחות אחרות (כגון יציבות, סיבתיות וכו'). ממשוואה (8.4.8) ניתן להסיק מייד כי קוטב הממוקם קרוב לציר המדומה יגרום להגבר גבוה בתדרים הקרובים לחלקו המדומה. לעומת זאת אפס במיקום דומה יגרום לניחות חזק בתדרים המתאימים.

דוגמה 8.4.1 נתכנן מסנן חוסם סרט, אשר יחסום רק סביבה קרובה של התדר ω_0 (מסנן כזה נקרא *Notch filter*). למען הפשטות---כדי לקבל מערכת מסדר ראשון עם קוטב מרוכב---נתכנן מערכת שאינה ממשית. נבחר גודל קטן $\varepsilon \ll 0.01$ ונתבונן במערכת בעלת קוטב יחיד ב-$(-\alpha) = -100\varepsilon + j\omega_0$ ואפס יחיד קרוב יותר לציר המדומה כלומר $(-\beta) = -\varepsilon + j\omega_0$.



איור 8.3: מסנן מסדר 2

מהחישוב (8.4.8) נקבל כי עבור מערכת זו

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(\omega-\omega_0)^2+\varepsilon^2}{(\omega-\omega_0)^2+10000\varepsilon^2}\,. \tag{8.4.11}$$

עבור $\omega \approx \omega_0$ נקבל כי

$$|H(j\omega)| \approx \left(\frac{\varepsilon^2}{10000\varepsilon^2}\right)^{1/2} = 0.01\,, \tag{8.4.12}$$

כלומר קיבלנו ניחות חזק כדרוש. לעומת זאת כיוון ש-ε קטן, הרי שעבור ω שאינו קרוב מאד ל-ω_0 (בפרט אם $|\omega-\omega_0| \gg 100\varepsilon$) נקבל

$$|H(j\omega)| \approx \left(\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(\omega-\omega_0)^2}\right)^{1/2} = 1\,. \tag{8.4.13}$$

קבלנו מסנן בעל ניחות גדול סביב תדר ω_0 אך ללא עיוות (כלומר שווה בקירוב ל-1בתדרים שאינם סביב ω_0.

התאור שלפנינו מתאים לא רק כאשר תגובת המערכת ניתנת לפירוק לשברים חלקיים כאוסף של קטבים מסדר ראשון, אלא גם כאשר ישנם קטבים ממשיים מסדר גבוה יותר. כדי להבין את התופעות הקשורות בקטבים מרוכבים ומרובים, די להבין את התנהגות מערכת מסדר שני.

8.5 הצגה גרפית של תגובת התדר---דיאגרמת בודה

לפי (8.4.8) את גודל וזוית תגובת התדר ניתן לרשום בצורה

$$|H(j\omega_0)| = |c|\,\frac{\prod_{i=0}^{M}|j\omega_0+\beta_i|}{\prod_{i=0}^{N}|j\omega_0+\alpha_i|} \tag{8.5.1}$$

$$\measuredangle H(j\omega_0) = \measuredangle c + \sum_{i=1}^{M}\phi_i^z - \sum_{i=1}^{N}\phi_i^p\,. \tag{8.5.2}$$

נתחיל בתאור האלמנטים הבסיסיים.

8.5.1 קוטב ממשי מסדר ראשון

נרשום את תגובת התדר בצורה

$$\frac{c}{j\omega+\alpha}=\frac{c/\alpha}{1+j\omega/\alpha}\,. \tag{8.5.3}$$

אם שהמערכת ממשית, הגודל c ממשי. לכן התרומה של c/α לפאזה היא π אם היחס ביניהם (או, באופן שקול, המכפלה) שלילי, או 0 אם היחס חיובי. לכן ברישום פולרי (גודל וזוית)

$$\frac{c}{j\omega+\alpha}=\frac{|c/\alpha|}{\sqrt{1+\omega^2/\alpha^2}}e^{j\pi u(-c\alpha)-j\tan^{-1}(\omega/\alpha)} \tag{8.5.4}$$

כאשר u היא פונקצית המדרגה. באופן כללי יותר אם c מרוכב אזי נרשום

$$\frac{c}{\alpha}=\left|\frac{c}{\alpha}\right|e^{j(\phi_c-\phi_\alpha)} \tag{8.5.5}$$

כאשר ϕ_c היא הפאזה של המספר המרוכב c ו-ϕ_α הוא 0 או π, לפי הסימן של α. לכן במקרה הכללי יותר נקבל

$$\frac{c}{j\omega+\alpha}=\frac{|c/\alpha|}{\sqrt{1+\omega^2/\alpha^2}}e^{j(\phi_c-\phi_\alpha)-j\tan^{-1}(\omega/\alpha)}\,. \tag{8.5.6}$$

הגענו לצורה סטנדרטית של מערכת כזו, במובן הבא. נבדוק את השפעת המכנה תחילה, כאשר את התדר נמדוד ביחידות של ω/α. אזי לכל המערכות אותה צורה של הגבר ואותה צורה של פאזה כפונקציה של התדר. כמובן שגדלים אלו מושפעים מהמונה, אולם זוהי השפעה קבועה (כפל בגודל, הזזה קבועה בפאזה). הצורה הכללית היא שעבור ω קטן המכנה אינו משפיע (ההגבר והפאזה קבועים). ההשפעה מתחילה להיות משמעותית כאשר מתקרבים ל-$\omega=\alpha$.

בתדר $\omega=\alpha$ ההגבר ירד, ביחס להגבר בתדר נמוך:

$$\left|\frac{H(j\omega)|_{\omega=\alpha}}{H(j\omega)|_{\omega\ll\alpha}}\right|=\left|\frac{(c/\alpha)/(1+j)}{(c/\alpha)/1}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{8.5.7}$$

בתדר גבוה יותר נקבל

$$\sqrt{1+\omega^2/\alpha^2}\approx\omega/\alpha \tag{8.5.8}$$

ולכן ההגבר יורד בצורה לינארית ב-ω.

חשבון דומה מראה כי הפאזה בנקודה $\omega=\alpha$ קטנה ב-$\pi/4$ מהפאזה ב-ω קטן. כאשר נמשיך ונגדיל את ω מעבר ל-α נקבל כי הזוית קטנה ב-$\pi/2$ מהזוית בתדר נמוך.

המצב דומה עבור אפס מסדר ראשון מהצורה

$$c(j\omega+\alpha)=c\alpha(1+j\omega/\alpha)\,. \tag{8.5.9}$$

כאשר כאן כמובן ההגבר עולה ב-$\sqrt{2}$ בתדר הברך $\omega=\alpha$, ועולה בצורה לינארית ω/α עבור ω גדול. הפאזה גדלה ב-$\pi/4$ בתדר הברך וגדלה בעד $\pi/2$ בתדרים גבוהים יותר.

8.5.2 מערכת מסדר שני

כיוון שאנו עוסקים במערכת ממשית, הקטבים (וכן האפסים) הם או ממשיים, או זוגות מרוכבים צמודים. המצב מורכב יותר עבור זוג קטבים צמודים (או זוג אפסים צמודים). זאת מכיוון שכעת ההתנהגות תלויה לא רק בתדר הברך, אלא גם בפרמטר ξ. נרשום מערכת עם צמד קטבים מרוכבים בצורה

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} \tag{8.5.10}$$

$$= \frac{e^{-j\tan^{-1}\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}}}{\sqrt{(1-\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\,. \tag{8.5.11}$$

חישוב דומה למקרה של קוטב בודד מראה כי בתדר הברך $\omega=\omega_n$ ההנחתה היא של $|1/2\xi|$, כלומר עבור $|\xi|$ שגודלו מעל חצי אכן תהיה הנחתה, אולם עבור ξ קטן יותר נקבל הגברה! אם $|\xi|=1/\sqrt{2}$ אזי ההנחתה בתדר הברך תהיה $1/\sqrt{2}$-כמו בקוטב בודד. אם $|\xi|=1$ אזי ההנחתה היא כמו זוג קטבים ממשיים (ואכן במקרה זה נקבל זוג קטבים ממשיים!). ירידת הפאזה גם היא תלויה בגורם הניחות ξ. בתדר גבוה בהרבה ההנחתה נשלטת על ידי האבר הראשון והיא בקירוב ω_n^2/ω^2, כלומר שוב הנחתה כפי שהיינו מקבלים מזוג קטבים ממשיים עם אותו תדר ברך, והפאזה ירדה ב-π. כלומר בתדר נמוך וגבוה ההתנהגות היא בקירוב כמו של שני קטבים, ללא תלות ב-ξ. בתדר הברך ξ משפיע על ההנחתה ועל הפאזה. בתדרי ביניים ההשפעה של ξ משמעותית---ובמיוחד בתדרים הקרובים לתדר הברך.

הרחבה של ניתוח זה למערכת ממשית עם תגובת תדר רציונלית היא לכאורה פשוטה---נפרק לשברים חלקיים ונטפל בכל איבר בנפרד. כמובן שהדבר ניתן לביצוע, בפרט במחשב. אולם נוח יותר לעבור לקואור-דינטות שונות. המבנה המקובל ביותר הוא של סקאלה לוגריתמית של ההגבר ושל התדר (עבור תדרים חיוביים בלבד), וסקאלה לינארית עבור הפאזה. ביתר דיוק

הגדרה 8.5.1 עבור ערך חיובי α, גודלו בדציבלים *Decibels* (או בקיצור db) הוא

$$20\log_{10}\alpha\,. \tag{8.5.12}$$

כך למשל הגבר פי 1 הוא $0db$, הגבר פי 10 הוא $20db$ וכו'. נפעיל כעת הגדרה זו על ההגבר: ראינו כי אם תגובת התדר כוללת רק אפסים וקטבים פשוטים אזי

$$|H(j\omega_0)| = |C|\frac{\prod_{i=0}^{M}|j\omega_0+\beta_i|}{\prod_{i=0}^{N}|j\omega_0+\alpha_i|} \tag{8.5.13}$$

$$\measuredangle H(j\omega_0) = \measuredangle c + \sum_{i=1}^{M}\phi_i^z - \sum_{i=1}^{N}\phi_i^p\,. \tag{8.5.14}$$

אם נפריד בין קטבים ואפסים ממשיים, לבין זוגות צמודים מרוכבים נקבל

$$|H(j\omega_0)| = |c| \frac{\prod |q_i(j\omega)|}{\prod |p_k(j\omega)|} \tag{8.5.15}$$

$$q_i(j\omega) = \begin{cases} j\omega + \beta_i & \text{אפס ממשי פשוט} \\ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j2\xi_i \frac{\omega}{\omega_i}\right) & \text{זוג אפסים צמודים מרוכבים} \end{cases} \tag{8.5.16}$$

$$p_k(j\omega) = \begin{cases} j\omega + \alpha_k & \text{קוטב ממשי פשוט} \\ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} + j2\xi_k \frac{\omega}{\omega_k}\right) & \text{זוג קטבים צמודים מרוכבים} \end{cases} \tag{8.5.17}$$

לכן אם נחשב את ההגבר בדציבלים נקבל, מתכונות הלוגריתם

$$|H(j\omega)|_{db} = |C|_{db} + \sum_i |q_i(j\omega)|_{db} - \sum_k |p_k(j\omega)|_{db} \tag{8.5.18}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle c + \sum_i \measuredangle(q_i(j\omega)) - \sum_k \measuredangle(p_k(j\omega)). \tag{8.5.19}$$

כעת אם ננתח כל אחד מהמחוברים יהיה קל למדי לשרטט את הגרף הכולל.

שיטה הנדסית חשובה לקרב את שני הגרפים האלו היא דיאגרמת בודה האסימפטוטית. בגישה זו אנו מקרבים את השפעת כל אחד מהאברים תוך שימוש בערכים עבור ω קטן או גדול, וקירוב עבור ערכי הביניים. נזכר כי מדובר בסקאלה לוגריתמית של התדר.

עבור קוטב פשוט ראינו כי ההגבר הוא קבוע בתדר נמוך---ונמשיך קירוב זה עד לתדר הברך. בתדרים גבוהים יותר הגבר של קוטב פשוט נתון על ידי

$$20\log\frac{1}{|1+j\omega/\alpha|} = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2/\alpha^2}} \tag{8.5.20}$$

$$\approx -10\log\left(\omega^2/\alpha^2\right) \tag{8.5.21}$$

$$= 20\log\alpha - 20\log\omega\,. \tag{8.5.22}$$

זהו קו ישר עם שיפוע של (-20) כאשר משרטטים את הגודל בדציבלים מול סקאלה לוגריתמית בתדר. בצורה דומה נקבל כי אפס ממשי פשוט נותן באופן אסימפטוטי שיפוע חיובי של $20db/decade$. חישוב דומה נותן כי (שוב בקירוב אסימפטוטי) צמד קטבים מרוכבים נותן ירידה, מתדר הברך והלאה, של $(-40db/dec)$ וצמד אפסים נותן עליה בגודל זהה.

הקירוב האסימפטוטי עבור הפאזה פשוט יותר: בסקלה לוגריתמית (של משתנה התדר) ולינארית בפאזה, עבור קוטב מסדר ראשון הפאזה קבועה עד דקדה אחת לפני תדר הברך, ומשם יורדת בצורה לינארית עד דקדה אחת אחרי תדר הברך (ירידה של $\pi/2$). עבור אפס פשוט המצב דומה אך יש עליה בפאזה. זוג קטבים מרוכבים יגרמו להתנהגות התלויה באופן חזק במקדם הריסון, אך גם כאן תחילת השינוי בפאזה הוא דקדה לפני תדר הברך וסיומה דקדה אחריו.

פרק 9

דוגמה מסכמת: מסנן מעשי

לאחר שהכרנו שיטות לניתוח מערכות בתחום התדר, כולל התמרות לפלס ופוריה, נסכם את הנושא בדוגמה לניתוח ותכנון של מסנן.

מסנני Butterworth הם מערכות לינאריות קבועות בזמן וסיבתיות, המתוארות בתחום התדר. הם אחד מסוגי המסננים המקובלים ביותר בהנדסה: זאת משום פשטות התכנון והמימוש, ומצד שני בשל גמישותם. בהמשך נגדיר משפחה זו של מסננים, ננתח אותם ונתכנן מסנן לפי דרישות נתונות. אנו נעסוק במסנן מעביר נמוכים: זוהי אבן פינה לתכנון מסננים כלליים, גם משום שזהו מסנן פשוט ובסיסי, וגם משום שניתן לתכנן מסננים רבים אחרים על ידי תכנון מסנן מעביר נמוכים תחילה, ואז התאמתו (על ידי הזזה בתדר למשל) לדרישות.

9.1 המסנן ותכונותיו

מסנן Butterworth מוגדר כך:

הגדרה 9.1.1 מסנן *Butterworth* מסדר N הוא מערכת לינארית, קבועה בזמן וסיבתית אשר תגובת התדר שלה $H_N(j\omega)$ מקיימת עבור $\omega_0 > 0$ כלשהוא,

$$|H_N(j\omega)|^2 \doteq \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_0)^{2N}} \ . \tag{9.1.1}$$

עבור מסנן כללי המקיים

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Lambda\,(j\omega/j\omega_0)} \ , \tag{9.1.2}$$

נקרא ל-Λ פונקצית הניחות, ול-ω_0 תדר הייחוס.

בהמשך נראה כיצד לממש מסנן כזה. אולם כבר מההגדרה אנו מסיקים את התכונות הבאות:

1. גודל תגובת התדר $|H(j\omega)|$ של המסנן יורד בצורה מונוטונית עם עליית התדר ω.
2. הערך המרבי של תגובת התדר הוא בתדר $\omega = 0$ והוא מקיים $\left|H(j\omega)\right|_{\omega=0} = 1$.

3. גודל תגובת התדר יורד ל- $1/\sqrt{2}$ בתדר ω_0:

$$\left|H(j\omega_0)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{9.1.3}$$

4. הניחות האסימפטוטי (ראה דאגרמת בודה) הוא $20N$ dB /decade.

5. תגובת התדר מקיימת

$$\left.\frac{\partial^k \left|H(j\omega)\right|^2}{\partial\omega^k}\right|_{\omega=0} = 0 \qquad 1 \le k \le 2N-1. \tag{9.1.4}$$

מסנן מעביר נמוכים בעל תכונה זו נקרא בעל שטיחות מקסימלית maximally flat בתדר אפס.

9.2 מבנה המסנן

נרצה לממש את המסנן על ידי מערכת ממשית (כלומר מערכת עם תגובת הלם ממשית). מתכונות התמרת פוריה

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = H(j\omega)\cdot H^*(j\omega) = H(j\omega)\cdot H(-j\omega). \tag{9.2.1}$$

כדי לחשב את מיקום הקטבים של המסנן, נרשום את הדרישות על פונקצית התמסורת של המסנן:

$$H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1+\left(s/j\omega_0\right)^{2N}}\ . \tag{9.2.2}$$

מכאן נובע מיידית כי הגודל של כל הקטבים של $H(s)H(-s)$ הוא ω_0, והם נתונים על ידי

$$s_k = \omega_0 \exp\left(j\left[\frac{\pi(2k+1)}{2N}+\frac{\pi}{2}\right]\right) \qquad 0 \le k \le 2N-1. \tag{9.2.3}$$

כלומר השרשים של ריבוע המסנן מקיימים את התכונות הבאות.

1. כל השרשים ממוקמים, במרווחים זוויתיים שווים של π/N, על מעגל שרדיוסו ω_0.

2. ראשית, אין שרשים על הציר המדומה $s = j\omega$ משום ש-$-1 \neq (j\omega_1/j\omega_0)^{2N}$. כעת נשים לב כי מדרישת הממשיות אנו מקבלים את נוסחה (9.2.1) וממנה נובע כי אם s_k הוא קוטב של $\||H\||^2$ אזי גם $(-s_k)$ הוא שורש, ומהממשיות נובע כי אם s_k הוא קוטב אזי גם s_k^* (הצמוד המרוכב) הוא שורש. כיוון שכל השרשים הם על מעגל ברדיוס ω_0 מספר השרשים הממשיים הוא או 0 או 2. אם כך, ישנן שתי אפשרויות: או שכל השרשים מרוכבים ואז מספר השרשים מתחלק ב-4, ואז אין שרשים ממשיים. זה יקרה אם N זוגי שכן זה בדיוק המקרה שמספר השרשים מתחלק ב-4. האפשרות השנייה היא שיש שני שרשים ממשיים: במקרה זה מספר השרשים אינו מתחלק ב-4, ולכן בהכרח N הוא אי זוגי.

מההגדרה של המסנן נובע כי אם $\sigma + j\omega_i$ הוא קוטב, אזי גם $(-\sigma - j\omega_i)$ הוא קוטב. כלומר, הקטבים של $H(s)H(-s)$ מופיעים בזוגות מהצורה $(\sigma + j\omega_i, -\sigma - j\omega_i)$. כדי לממש מסנן יציב, נבחר את הקטבים אשר חלקם הממשי שלילי להיות הקטבים של $H(s)$. שאר הקטבים יהיו לכן קטבי $H(-s)$. לדוגמה, הרי פונקציות התמסורת של מסנני Butterworth מסדר 1–3:

$$H_1(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \ , \tag{9.2.4}$$

$$H_2(s) = \frac{\omega_0^2}{(s + \omega_0 \exp(j\pi/4)) \, (s + \omega_0 \exp(-j\pi/4))} \tag{9.2.5}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}, \tag{9.2.6}$$

$$H_3(s) = \frac{\omega_0^3}{(s + \omega_0) \, (s + \omega_0 \exp(j\pi/3)) \, (s + \omega_0 \exp(-j\pi/3))} \tag{9.2.7}$$

$$= \frac{\omega_0^3}{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3} \ . \tag{9.2.8}$$

9.3 תכנון המסנן

כדי לתכנן מסנן עלינו להגדיר כמה קריטריונים מקובלים בתכנון מסננים. נזכור ששאיפתנו היא לתכנן מסנן מעביר נמוכים.

הגדרה 9.3.1 עבור מסנן מעביר נמוכים מעשי H,

1. נגדיר שלושה תחומי תדר: תחום ההעברה *Passband*: $0 \leq \omega \leq \omega_p$, תחום המעבר *Transition band*: $\omega_p \leq \omega \leq \omega_s$ ותחום הניחות *Stopband*: $\omega_s \leq \omega$.

2. הגליות δ_p של המסנן H היא המרחק המירבי בין גודל המסנן לבין 1, בתחום ההעברה:

$$\delta_p \doteq \max_{0 \leq \omega \leq \omega_p} ||H(\omega)| - 1|. \tag{9.3.1}$$

3. גורם הניחות δ_s הוא הגודל המירבי של H בתחום הניחות:

$$\delta_s \doteq \max_{\omega \geq \omega_s} |H(j\omega)|. \tag{9.3.2}$$

4. תדר הקטעון הוא התדר מעליו גודל המסנן ירד ל-$1/\sqrt{2}$ מגודלו הנומינלי (שהוא 1).

5. גורם ההבחנה *discrimination factor*:

$$d \doteq \left[\frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2} \ . \tag{9.3.3}$$

d הוא חיובי, ושואף לאפס כאשר הגליות או גורם הניחות (או שניהם) שואפים לאפס.

6. גורם הסלקטיביות *selectivity factor*: $\kappa \doteq \omega_p/\omega_s$. גורם הסלקטיביות קטן מ-1, ושווה ל-1 רק אם תחום המעבר נעלם.

עבור מסנן אידאלי, $\delta_s = \delta_p = 0$ ו-$\omega_p = \omega_s$ והם שווים לתדר הקטעון. כמובן שבמקרה זה גורם ההבחנה וגורם הסלקטיביות אינם מוגדרים.

נשים לב כי בהגדרת ה"שגיאה" של המסנן, הן הגליות והן גורם הניחות, אנו מתחשבים בהגבר בלבד, כלומר בערך המוחלט של $H(j\omega)$, ומתעלמים מהפאזה.

בעיית התכנון שננסה לפתור היא הבאה. נתונים לנו הערכים של $\delta_s > 0, \delta_p > 0, \omega_s, \omega_p <$. מטרתנו היא לתכנן מסנן Butterworth אשר יעמוד בתנאים אלו. כלומר, עלינו למצוא N ו-ω_0 כך שנעמוד בתנאים הדרושים. נתחיל בקביעת סדר המסנן. כיוון שהגודל של המסנן הוא מונוטוני

$$|H_N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(j\omega/j\omega_0)^{2N}}} \ , \tag{9.3.4}$$

מספיק לבדוק את גודלו בנקודות ω_p ו-ω_s. הדרישות הן

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^{2N}} \geq (1-\delta_p)^2 \ , \tag{9.3.5}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2N}} \leq \delta_s^2 \ . \tag{9.3.6}$$

מכאן נקבל

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^{2N} (1-\delta_p)^2 \leq 1-(1-\delta_p)^2 \tag{9.3.7}$$

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^{2N} \leq \frac{1-(1-\delta_p)^2}{(1-\delta_p)^2} = (1-\delta_p)^{-2}-1 \tag{9.3.8}$$

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2N} \geq \frac{1-\delta_s^2}{\delta_s^2} = \delta_s^{-2}-1 \ . \tag{9.3.9}$$

נזכר כעת בהגדרות של גורם ההבחנה d וגורם הסלקטיביות κ: שניהם ניתנים לחישוב מתוך הגדלים הנתונים. נחלק את שני הביטויים האחרונים ונקבל

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N} \geq \frac{\delta_s^{-2}-1}{(1-\delta_p)^{-2}-1} = \frac{1}{d^2} \tag{9.3.10}$$

$$N \geq \frac{\log 1/d}{\log 1/\kappa}. \tag{9.3.11}$$

סדר המסנן אם כך צריך להיות השלם הקטן ביותר המקיים שוויון זה. כעת נוכל לחלץ את ω_0 מתוך נוסחאות (9.3.5)--(9.3.9):

$$\omega_p \left[(1-\delta_p)^{-2}-1\right]^{-1/2N} \leq \omega_0 \leq \omega_s \left[\delta_s^{-2}-1\right]^{-1/2N} \ . \tag{9.3.12}$$

(אם $\delta_p < 1/2, \ \delta_s < 1/2$ אזי יש פתרון). כפי שכבר ראינו, עבור מסנן זה ω_0 הוא תדר הקיטעון.

לסיכום, תהליך התכנון של המסנן כך שיעמוד בדרישות מורכב מהשלבים הבאים:

תכנון Butterworth

1. מתוך הנתונים חשב את גורם ההבחנה ואת גורם הסלקטיביות.
2. חשב את סדר המסנן (עגל כלפי מעלה).
3. חשב את תדר הקטעון.
4. חשב את מיקום הקטבים.