פרק 0
סימונים ומונחים

1. מושגים יסודיים בתורת הקבוצות

אנו מניחים כי הקורא מתמצא היטב ביסודות הראשונים של תורת הקבוצות עליהם מתבסס ספר זה. לכן רק נציג כמה מהסימונים וההגדרות הדרושים לנו.

תורת הקבוצות הכללית מטפלת בכל סוגי הקבוצות האפשריות, אך האנליזה המתמטית הנלמדת בקורסים ללימודי תואר ראשון מטפלת בדרך כלל בקבוצות של מספרים ממשיים או מרוכבים ובקבוצות של פונקציות ממשיות או מרוכבות. אוסף העצמים מהם מורכבת הקבוצה נקראים **האיברים** של הקבוצה, והם מסומנים בדרך כלל ע"י אותיות קטנות: a, b, c, $\ldots$ אם a הוא עצם השייך לקבוצה A אזי נאמר כי a הוא **איבר של** A ונרשום $a \in A$. אם b **אינו** איבר של A אזי נרשום $b \notin A$.

את הקבוצה A אשר איבריה הם המספרים -6, $3+i$, $5i-2$, ו־ 7 נתאר כך:

$$A = \{-6,\ 3+i,\ 5i-2,\ 7\}.$$

באופן דומה נוכל לתאר קבוצת פונקציות כגון:

$$B = \{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots,\ \sin 100x\}$$

הכוללת בתוכה בדיוק 100 איברים שכל אחד מהם הוא פונקציה. מלבד קבוצות סופיות, נוכל לתאר גם קבוצות אינסופיות כגון:

$$\{1,\ 1+2x,\ 1+2x+3x^2,\ 1+2x+3x^2+4x^3,\ \ldots\}.$$

בצורה כללית יותר, נתאר קבוצה A באמצעות ביטוי מן הצורה

$$A = \{x \mid \phi(x)\} \tag{0.1}$$

כאשר המשתנה x חל על קבוצת עצמים הידועים לנו מראש (כגון מספרים מרוכבים או פונקציות מרוכבות), והביטוי $\phi(x)$ מציין תכונה אשר עשויה להתקיים או לא עבור העצם x (כגון משוואה או יחס סדר). משמעות ההגדרה **(0.1)** היא שהקבוצה A היא אוסף כל העצמים x אשר יש להם את התכונה ϕ. למשל נוכל להגדיר

$$A = \left\{x \mid x^4 - 1 = 0\right\}.$$

אם x חל על מספרים מרוכבים, אז נוכל גם לרשום

$$A = \{1,\ -1,\ i,\ -i\}.$$

לפעמים נוח לבטא את $\phi(x)$ בצורה מילולית כמו בדוגמאות הבאות:

$$A = \{x \mid \text{הוא מספר שלם אי-זוגי } x\}$$
$$\mathcal{P}_3 = \{p \mid \text{הוא פולינום ממעלה 3 ומטה } p\}.$$

2. סימונים מן החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי

מספרים שלמים וחיוביים, ז"א המספרים $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, נקראים **מספרים טבעיים**. את קבוצת כל המספרים הטבעיים נסמן ע"י $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, n, \ldots\}$$

כאשר n מסמן מספר טבעי כלשהו. את קבוצת כל המספרים **השלמים** נסמן ע"י $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

את קבוצת כל המספרים השלמים (כולל 0) האי-שליליים נסמן על ידי $\mathbb{Z}_+$:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

הבדל היחידי בין הקבוצה $\mathbb{Z}_+$ לבין $\mathbb{N}$ הוא בכך שהראשונה מכילה בתוכה את 0 ואילו השניה אינה מכילה את 0. כל מספר מן הצורה $\frac{m}{n}$, כאשר m ו-n הם מספרים שלמים ו-$n \neq 0$, נקרא **שבר** או **מספר רציונלי**. את קבוצת כל המספרים הרציונליים נסמן על ידי $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \;\middle|\; n \neq 0 \text{ ו-} \text{מספרים שלמים ו-} n \text{ ו-} m\right\}.$$

את קבוצת כל המספרים הממשיים נסמן על ידי $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \{x \mid \text{מספר ממשי } x\}.$$

את קבוצת כל המספרים הממשיים האי-שליליים נסמן על ידי $\mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

את קבוצת כל המספרים המרוכבים נסמן על ידי $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

כל מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ ניתן לרשום בצורה $z = x + iy$, כאשר x נקרא **החלק הממשי** של z, ו־ y נקרא **החלק המדומה** של z. נסמן $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

במהלך הספר נשתמש בסימונים הבאים עבור קטעים של מספרים ממשיים: לכל שני מספרים ממשיים a, b, נגדיר:

קטע פתוח: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

קטע סגור: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

קטע חצי-סגור חצי-פתוח: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

קטע חצי-פתוח חצי-סגור: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

כל הקבוצות האלה מתאימות לקטעים **סופיים** של הישר הממשי. ישנם גם קטעים **אינסופיים**. לכל מספר ממשי a נגדיר ארבעה סוגי קטעים כאלה.

חצי-ישר ימני פתוח: $(a, \infty) = \{x \mid a < x\}$

חצי-ישר ימני סגור: $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$

חצי-ישר שמאלי פתוח: $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$

חצי-ישר שמאלי סגור: $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$.

את קבוצת המספרים הממשיים עצמה מקובל לתאר גם באופן הבא

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$$

כאשר הסימן ∞ מציין "אינסוף" באופן סימלי בלבד.

נזכיר כי פונקציה $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ נקראת **רציפה למקוטעין** אם יש לה לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות ואם, בנוסף לכך, בכל נקודת אי-רציפות קיימים הגבולות החד-צדדיים (הגבול הימני והגבול השמאלי). נדגיש כי במונח "נקודת אי-רציפות" אנו כוללים גם את האפשרות שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה זו. כל פונקציה f כנ"ל ניתן להציג בצורה

$$f = u + iv$$

כאשר u ו־ v הן פונקציות ממשיות רציפות למקוטעין בקטע $[a,b]$. הפונקציה u נקראת **החלק הממשי** של f ורושמים $u=\mathrm{Re}(f)$. הפונקציה v נקראת **החלק המדומה** של f ורושמים $v=\mathrm{Im}(f)$. על ידי $C[a,b]$ נסמן את מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, ועל ידי $E[a,b]$ נסמן את מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין $f:[a,b]\to\mathbb{C}$.

3. נוסחאות טריגונומטריות שימושיות

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin n\pi=0,\quad n\in\mathbb{Z}$$
$$\cos n\pi=(-1)^n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\sin\alpha=\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\qquad\qquad \tan\alpha=\cot(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)$$
$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad\qquad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin^2\alpha=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha\qquad\qquad \cos^2\alpha=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha$$
$$\sin^3\alpha=\tfrac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)\qquad\qquad \cos^3\alpha=\tfrac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)$$
$$\sin^4\alpha=\tfrac{1}{3}(3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)\qquad\qquad \cos^4\alpha=\tfrac{1}{3}(3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)$$