פרק 1
רקע כללי:
מרחבי מכפלה פנימית

0. הקדמה

הנושאים העקריים בהם נעסוק בפרק זה הם מערכות אורתונורמליות ואורתוגונליות בתוך מרחב וקטורי בעל מכפלה פנימית, ובמושגים השונים הקשורים לכך. נושאים אלה כלולים לפעמים בחומר הרגיל הנלמד בקורס אלגברה ליניארית. חשיבות מרכזית יש לנושא מערכות אורתונורמליות אינסופיות, המובא בסוף הפרק, אשר אליו קשורות התוצאות בפרק השני (טורי פוריה). ארבעת הסעיפים הראשונים של פרק זה מהווים חזרה תמציתית על כמה מן המושגים והעובדות היסודיות מתחום האלגברה הליניארית הדרושים לנו כדי לפתח את הנושאים השונים בספר זה. לכך עשוי הקורא למצוא בסעיפים אלה עזר רב לרענון ידיעותיו בנושא.

1. מרחבים ליניאריים ומרחבי מכפלה פנימית

המבנה האלגברי הבסיסי הדרוש לנו הוא המרחב הליניארי מעל שדה סקלרים (או המרחב הוקטורי כפי שהוא נקרא לרוב). שדה הסקלרים שלנו F יהיה תמיד שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ או שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$. כזכור, איברים של מרחב ליניארי נקראים **וקטורים** (vectors). מבחינה פורמלית, קבוצה לא ריקה V נקראת **מרחב ליניארי** (linear space) מעל השדה F אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. **חיבור וקטורים:** קיימת פעולת חיבור על V שמסומנת בדרך כלל "$+$" כך שלכל שני וקטורים $u, v \in V$, הסכום $u+v$ הוא וקטור השייך ל- V.
2. **אסוציאטיביות החיבור:** לכל $u, v, w \in V$ מתקיים $(u+v)+w = u+(v+w)$.
3. **וקטור האפס:** קיים וקטור ב- V המסומן $\vec{0}$ והנקרא "וקטור האפס" כך שלכל $v \in V$ מתקיים $\vec{0}+v = v$.
4. **וקטור נגדי:** לכל וקטור $v \in V$ קיים וקטור המסומן $-v$ והנקרא "הוקטור הנגדי של v" כך ש- $v+(-v) = \vec{0}$.
5. **כפל בין סקלר ווקטור:** ניתן להכפיל כל וקטור $v \in V$ על ידי סקלר $a \in F$ ולקבל וקטור $av \in V$.
6. **קומוטטיביות:** לכל $u, v \in V$ מתקיים $u+v = v+u$.
7. לכל סקלר $a \in F$ ולכל $u, v \in V$: $a(u+v) = au+av$.
8. לכל $a, b \in F$ ולכל $u \in V$ מתקיים $(a+b)u = au+bu$ וגם $a(bu) = (ab)u$.
9. עבור סקלר היחידה 1 של F ועבור כל וקטור $v \in V$: $1 \cdot v = v$.

אם V הוא מרחב ליניארי מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ אז נקרא לו **מרחב ליניארי ממשי**, ואם V מרחב ליניארי מעל שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ אז נקרא לו **מרחב ליניארי מרוכב**. תת-קבוצה $W \subseteq V$ נקראת **תת-מרחב ליניארי** (linear subspace) של המרחב V אם היא מקיימת את כל התנאים הנ"ל מעל אותו שדה סקלרים של V. תנאי ידוע לבדיקה אם W היא תת-מרחב של V הוא: $W \neq \emptyset$ ולכל $u, v \in W$ ולכל $a, b \in F$ מתקיים $au+bv \in W$. ניתן לבטא תנאי זה במילים: W **הוא תת-מרחב ליניארי של V אם ורק אם W תת-קבוצה לא ריקה של V הסגורה תחת חיבור וקטורים ותחת כפל וקטור בסקלר**. כל מרחב ליניארי מעתה ואילך הוא מרוכב אלא אם כן נציין אחרת במפורש. נסקור עכשיו עוד מספר מושגים חשובים הקשורים למושג המרחב הליניארי.

הגדרה 1.1: יהי V מרחב ליניארי ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$. וקטור u נקרא **צירוף ליניארי** של הוקטורים $\{v_1, \ldots, v_n\}$ אם קיימים סקלרים $a_1, \ldots, a_n \in F$ כך ש-

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

קבוצת כל הוקטורים u שהם צירוף ליניארי של הוקטורים $\{v_1, \ldots, v_n\}$ מסומנת על ידי $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

כזכור, $W = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ הוא התת-מרחב הליניארי של V **הנפרש** על ידי קבוצת הוקטורים $\{v_1, \ldots, v_n\}$. נאמר גם כי הקבוצה $\{v_1, \ldots, v_n\}$ פורשת את W.

הגדרה 1.2: יהי V מרחב ליניארי. קבוצה סופית של וקטורים $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראים **בלתי תלויים ליניארית** (linearly independent) אם השוויון

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \vec{0}, \qquad a_1, a_2, \dots, a_n \in F$$

מתקיים רק כאשר $a_1 = \cdots = a_n = 0$. אחרת, הוקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ נקראים **תלויים ליניארית** (linearly dependent).

משתי ההגדרות נובע מייד כי הוקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ בלתי תלויים ליניארית אם ורק אם לכל $1 \le i \le n$, הוקטור v_i אינו צירוף ליניארי של הוקטורים האחרים בקבוצה.

הגדרה 1.3: קבוצת וקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ נקראת **בסיס** (basis) למרחב ליניארי V אם $V = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ ואם קבוצת הוקטורים $\{v_1, \dots, v_n\}$ בלתי תלויה ליניארית. המספר הטבעי n נקרא **המימד** (dimension) של V ורושמים $n = \dim(V)$.

הקורא יזכור בודאי מלימודי האלגברה הליניארית, כי לכל מרחב ליניארי ממשי או מרוכב קיימים אינסוף בסיסים שונים, אך לכל שני בסיסים יש אותו מספר איברים ועל כן הגדרת המימד אינה תלויה בבסיס ספציפי. כמו-כן, קיים משפט המבטיח שלכל מרחב ליניארי יש בסיס (לא בהכרח סופי!) ולכן לכל מרחב ליניארי קיים מימד. מושג נוסף בעל חשיבות הוא מושג המכפלה הפנימית. נציין שההגדרה של מרחב ליניארי אינה כוללת פעולת כפל בין שני וקטורים. לא בכל מרחב ליניארי קיימת מכפלה פנימית.

הגדרה 1.4: (מכפלה פנימית) יהי V מרחב ליניארי ממשי או מרוכב. **מכפלה פנימית** (inner product) היא פעולה בינארית על איברי V המסומנת על ידי $\langle u, v \rangle$ כאשר $u, v \in V$, כך שתוצאת הפעולה היא סקלר (לא וקטור!), המקיימת את התנאים:

1. לכל $v \in V$, $\langle v, v \rangle$ הוא מספר ממשי המקיים $\langle v, v \rangle \ge 0$.
2. לכל $v \in V$, $\langle v, v \rangle = 0$ אם ורק אם $v = \vec{0}$.
3. לכל $u, v, w \in V$ ולכל זוג סקלרים a, b: $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$.
4. לכל $u, v \in V$: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

מרחב ליניארי בעל מכפלה פנימית נקרא **מרחב מכפלה פנימית**.

הביטוי $\overline{\langle v, u \rangle}$ מסמן את המספר הצמוד המרוכב של $\langle v, u \rangle$. אם שדה הסקלרים שלנו הוא $\mathbb{R}$ אז נוכל כמובן לרשום את תנאי 4 בצורה $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$. ישנן כמה וכמה תכונות נוספות למכפלה הפנימית הנובעות מן ההגדרה:

א. לכל $u,v,w\in V$ ולכל $a,b\in\mathbb{C}$: $\langle u,av+bw\rangle=\overline{a}\langle u,v\rangle+\overline{b}\langle u,w\rangle$.

ב. לכל $v\in V$ ולכל $a\in\mathbb{C}$: $\langle av,av\rangle=|a|^2\langle v,v\rangle$.

ג. לכל $v\in V$: $\left\langle\vec{0},v\right\rangle=0$.

ד. באופן כללי, לכל סדרה סופית של וקטורים $\{u_k\}_{k=1}^n$, לכל סדרת סקלרים $\{a_k\}_{k=1}^n$, ולכל וקטור v מתקיים

$$\langle\sum_{k=1}^n a_k u_k,v\rangle=\sum_{k=1}^n a_k\langle u_k,v\rangle$$

$$\langle v,\sum_{k=1}^n a_k u_k\rangle=\sum_{k=1}^n \overline{a_k}\langle v,u_k\rangle$$

נביא כעת דוגמאות אופייניות למרחבי מכפלה פנימית.

דוגמא 1.1: המרחב האויקלידי $V=\mathbb{R}^n$ עם פעולת החיבור והכפל בסקלר הסטנדרטיות מהווה מרחב וקטורי מעל שדה הסקלרים $\mathbb{R}$. יהי $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ וקטור של מספרים ממשיים כך שלכל $1\le k\le n$, $r_k>0$. נגדיר על $\mathbb{R}^n$ מכפלה פנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{r}}$ באופן הבא: לכל זוג וקטורים $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ו־ $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ב־ $\mathbb{R}^n$,

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathbf{r}}=\sum_{k=1}^n r_k x_k y_k\ .$$

הוקטור $\mathbf{r}$ נקרא **וקטור המשקל** של המכפלה הפנימית. כאשר $r_k=1$ לכל $1\le k\le n$, אז המכפלה הפנימית המתאימה מסומנת $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$,

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

ונקראת **המכפלה הפנימית הסטנדרטית** על $\mathbb{R}^n$ (dot product).

דוגמא 1.2: באופן דומה לדוגמא הקודמת, $V=\mathbb{C}^n$ עם פעולת החיבור והכפל בסקלר הסטנדרטיות מהווה מרחב וקטורי מעל שדה הסקלרים $\mathbb{C}$. יהי $\mathbf{r}$ כמו בסעיף הקודם. לכל זוג וקטורים $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n$ נגדיר:

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle_{\mathbf{r}}=\sum_{k=1}^n r_k x_k \overline{y_k}\ .$$

לא קשה להווכח כי זוהי מכפלה פנימית על $\mathbb{C}^n$. כמו בדוגמא הקודמת, **המכפלה הפנימית הסטנדרטית** על $\mathbb{C}^n$ היא

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}.$$

דוגמא 1.3: יהי $V = C[a,b]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הסטנדרטיות. זהו מרחב ליניארי מעל שדה הסקלרים $\mathbb{C}$. לכל זוג פונקציות $f, g \in C[a,b]$ נגדיר

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \, .$$

לא קשה לבדוק כי זוהי מכפלה פנימית על $C[a,b]$.

דוגמא 1.4: יהי

$$\ell_2 = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots),\ x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\} .$$

כלומר, ℓ_2 הוא מרחב כל הסדרות האינסופיות של מספרים מרוכבים $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שהטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ מתכנס. פעולת החיבור על ℓ_2 היא פעולת החיבור הסטנדרטית של שתי סדרות, וכך גם פעולת הכפל בסקלר. מאוחר יותר נוכיח כי ℓ_2 הוא מרחב ליניארי מעל שדה הסקלרים $\mathbb{C}$ (העובדה ש־ ℓ_2 סגור תחת חיבור אינה טריביאלית). לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$ נגדיר

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \, .$$

קל להוכיח כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מקיימת את כל ארבעת התנאים של הגדרת המכפלה הפנימית. קשה יותר להוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ מתכנס לכל $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$. עובדה זו תנבע מאי-שוויון קושי-שוורץ אשר נוכיח בסעיף הבא.

תרגילים

1. יהיו $V_1, V_2, \ldots, V_n$ מרחבים ליניאריים מעל שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$. הוכח שגם $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$ הוא מרחב ליניארי. מה תוכל לאמר על $W = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$?

2. הוכח שהקבוצה

$$V = \{ f \mid \text{אינטגרבילית בהחלט מעל } \mathbb{R} \ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

מהווה מרחב ליניארי מעל $\mathbb{R}$.

3. יהי $C[-1,2]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f : [-1,2] \to \mathbb{C}$. אילו מן הביטויים הבאים מגדירים מכפלה פנימית על $C[-1,2]$ ואילו לא?

א. $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} |f(t)+g(t)|\,dt$

ב. $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} f(t)\overline{g(t)}\,dt + f(-\frac{1}{2})\overline{g(-\frac{1}{2})}$

ג. $\langle f,g\rangle = 3\int_{-1}^{2} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

ד. $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)}$

4. יהי V מרחב כל הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים בקטע $[-\pi,\pi]$. נגדיר:

$$\langle f,g\rangle = f(-\pi)g(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g''(x)\,dx .$$

האם זוהי מכפלה פנימית על V?

5. יהי $C^1[0,1]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ בעלות נגזרת רציפה על כל הקטע $[0,1]$. נגדיר

$$\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f'(0)\overline{g'(0)} + f(1)\overline{g(1)} .$$

א. האם זוהי מכפלה פנימית על תת-המרחב $\mathcal{P}_2 = \mathrm{span}\{1,x,x^2\}$?

ב. האם זוהי מכפלה פנימית על $C^1[0,1]$?

6. יהי $C^1[0,1]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ בעלות נגזרת רציפה על כל הקטע $[0,1]$. איזה מבין הביטויים הבאים מגדיר מכפלה פנימית על $C^1[0,1]$?

א. $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}\,dt$

ב. $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f'(1)\overline{g'(1)}$

ג. $\langle f,g\rangle = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\overline{g(t)}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

2. מושג הנורמה

מושג הנורמה קשור באופן טבעי למושג המכפלה הפנימית. על מנת להגדיר מהי נורמה, אין אנו זקוקים למכפלה פנימית, אך בכל מרחב מכפלה פנימית ניתן להגדיר נורמה בצורה טבעית (כפי שנראה).

הגדרה 1.5: יהי V מרחב ליניארי. **נורמה** (norm) ב־V היא פונקציה מ־V ל־$\mathbb{R}_+$ שנסמן על ידי $\|\cdot\|$, המקיימת את התנאים הבאים:

1. לכל $v\in V$, $\|v\|\geq 0$.

2. $\|v\|=0$ אם ורק אם $v=\vec{0}$.

3. לכל $v\in V$ ולכל $a\in\mathbb{C}$, $\|av\| = |a|\cdot\|v\|$.

4. לכל $u,v\in V$, $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ (**אי-שוויון המשולש**).

מושג הנורמה הוא הכללה של מושג **הגודל** או מושג **המרחק** (מוקטור האפס). עבור כל $u,v\in V$, נוכל להתייחס אל המספר $\|u-v\|$ כאל המרחק שבין u ו־ v. לכן $\|u\|$ הוא המרחק בין u ו־ $\vec{0}$, או הגודל של u.

הדוגמאות הפשוטות ביותר לנורמה הן הערך המוחלט ב־ $\mathbb{R}$ וב־ $\mathbb{C}$. להלן דוגמאות נוספות:

דוגמא 1.5: אם $V=\mathbb{R}^n$ או $V=\mathbb{C}^n$ אז לכל $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in V$ נגדיר

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}.$$

מייד נראה כי נוסחה זו מגדירה נורמה על V שנקראת **הנורמה האויקלידית**.

דוגמא 1.6: יהי V כמו בדוגמא 1.5. נגדיר עליו נורמה נוספת השונה מן הנורמה האויקלידית,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty=\max\Big\{|x_k|\ \Big|\ k=1,2,\ldots,n\Big\}.$$

נורמה זו נקראת **נורמת האינסוף** או **הנורמה האוניפורמית**.

דוגמא 1.7: עבור $V=\mathbb{R}^n$ או $V=\mathbb{C}^n$ נוכל להגדיר נורמה שלישית, השונה מן השתיים הקודמות,

$$\|\mathbf{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|.$$

קל לבדוק שזוהי אכן נורמה.

דוגמא 1.8: אם $V=C[a,b]$ אז לכל $f\in V$,

$$\|f\|_\infty=\max\Big\{|f(x)|\ \Big|\ a\le x\le b\Big\}$$

היא נורמה, שגם היא נקראת **נורמת האינסוף** או **הנורמה האוניפורמית**.

כאשר V הוא מרחב מכפלה פנימית, אז ניתן להגדיר עליו נורמה בצורה טבעית על ידי

$$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

על מנת להוכיח כי זוהי אכן נורמה ב־ V, עלינו להוכיח קודם כל את אי-השוויון החשוב הבא.

משפט 1.6: (אי-שוויון קושי-שוורץ, Cauchy-Schwartz) **יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי לכל $u,v\in V$ מתקיים אי-השוויון**

$$|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|.$$

הוכחה: אם $\langle u,v\rangle = 0$ אז אי-השוויון מתקיים באופן טריביאלי. נניח כי $\langle u,v\rangle \neq 0$ (ולכן $u,v \neq \vec{0}$). נסמן $a = \langle u,v\rangle$ (a עשוי להיות מספר מרוכב). אזי עבור כל מספר ממשי λ מתקיים

$$\begin{aligned}
0 \leq \|u-\lambda av\|^2 &= \langle u-\lambda av, u-\lambda av\rangle \\
&= \langle u,u\rangle - \lambda\langle u,av\rangle - \lambda\langle av,u\rangle + \lambda^2\langle av,av\rangle \\
&= \|u\|^2 - \lambda\overline{a}\langle u,v\rangle - \lambda a\langle v,u\rangle + \lambda^2 a\overline{a}\langle v,v\rangle \\
&= \|u\|^2 - \lambda\overline{a}a - \lambda a\overline{a} + \lambda^2 a\overline{a}\|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 - 2\lambda|a|^2 + \lambda^2|a|^2\|v\|^2
\end{aligned}$$

נתבונן בביטוי האחרון כפולינום במשתנה λ שמקבל ערכים אי-שליליים בלבד לכל λ ממשי. מאחר והדיסקרימיננטה במקרה זה היא אי-חיובית, או על ידי הצבת $\lambda = \frac{1}{\|v\|^2}$ (הערך המינימלי של הפולינום) נובע כי

$$0 \leq \|u\|^2\|v\|^2 - |a|^2.$$

מכאן $|a| \leq \|u\|\|v\|$. מאחר ו־ $a = \langle u,v\rangle$, קבלנו את אי-שוויון קושי-שוורץ. ∎

משפט 1.7: יהי V מרחב מכפלה פנימית. אם לכל $v \in V$ נגדיר

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

אז נקבל נורמה על V.

הוכחה: על פי הגדרת המכפלה הפנימית, המספר $\langle v,v\rangle$ הוא אי-שלילי לכל $v \in V$. לכן הביטוי $\sqrt{\langle v,v\rangle}$ מוגדר היטב (וכמובן אי-שלילי). ברור כי $\|v\| = 0$ אם ורק אם $\langle v,v\rangle = 0$. על סמך הגדרת המכפלה הפנימית, שקול התנאי האחרון ל־ $v = \vec{0}$, ובכך הוכחנו את תכונות **1** ו־**2** של הנורמה. עכשיו יהי $a \in \mathbb{C}$. אזי

$$\|av\|^2 = \langle av,av\rangle = |a|^2\langle v,v\rangle = |a|^2 \cdot \|v\|^2.$$

לכן $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$, ובכך הוכחנו את תכונה **3** של הנורמה. נשאר להוכיח את אי-שוויון המשולש. יהיו $u,v \in V$. אזי

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\
&= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\
&= \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \|v\|^2
\end{aligned}$$

ברור כי הביטוי $\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}$ מסמן מספר ממשי, ומאי-שוויון קושי-שוורץ יוצא כי

$$\left|\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}\right| \le 2|\langle u,v\rangle| \le 2\|u\|\cdot\|v\| .$$

לכן

$$\|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$$

וקבלנו את אי-שוויון המשולש. ■

מבין כל הדוגמאות שנתנו לנורמות, רק הנורמה האויקלידית היא נורמה המבוססת על מכפלה פנימית. המכפלה הפנימית אשר עליה מבוססת נורמה זו היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית אותה הגדרנו בדוגמא **1.2**. לכן ממשפט **1.7** נובע כי הנורמה האויקלידית היא אכן נורמה.

מאי-שוויון קושי-שוורץ ומאי-שוויון המשולש נוכל לגזור אי-שוויונים יותר ספציפיים.

דוגמא 1.9: אם נסתכל על $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, אז לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, הנורמה של $\mathbf{x}$ היא

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} .$$

ערך זה נקרא גם **המרחק** של $\mathbf{x}$ מראשית הצירים (זכור את משפט פיתגורס). מאי-שוויון קושי-שוורץ נקבל כי לכל $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} .$$

לפעמים רושמים אי-שוויון זה בצורה הבאה:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) .$$

דוגמא 1.10: באופן דומה, אם נסתכל על $\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, אז לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$, הנורמה של $\mathbf{x}$ היא

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} .$$

מאי-שוויון קושי-שוורץ נקבל כי לכל $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2}. \tag{1.1}$$

מאי-שוויון המשולש נובע כי לכל $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n$,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2}. \tag{1.2}$$

דוגמא 1.11: נשתמש כעת בתוצאות הקודמות בכדי להוכיח כי ℓ_2 הוא אכן מרחב ליניארי ושהמכפלה שהגדרנו עליו בדוגמא **1.4** היא אכן מכפלה פנימית. יהיו $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\ell_2$. נוכיח ראשית כל כי המכפלה הפנימית $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ אכן מוגדרת. נזכור כי

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}x_n\overline{y_n}.$$

נוכיח כי הטור מתכנס בהחלט (כלומר, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n\overline{y_n}|$ מתכנס). לכל m טבעי, מאי-השוויון (**1.1**) נובע כי

$$\sum_{n=1}^{m}|x_n\overline{y_n}| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{m}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{m}|y_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2}=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

לכן סדרת הסכומים החלקיים $S_m=\sum_{n=1}^{m}|x_n\overline{y_n}|$ חסומה מלמעלה על ידי $\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$. מאחר וסדרת הסכומים החלקיים $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ היא מונוטונית עולה, הרי שהיא מתכנסת. מכאן שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$ מתכנס, ולכן המכפלה הפנימית על ℓ_2 מוגדרת היטב. נשאר להוכיח כי המרחב ℓ_2 סגור תחת חיבור. יהיו $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\ell_2$. עלינו להראות כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^2$ מתכנס. מאי-שוויון (**1.2**) נובע כי לכל n טבעי,

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n=1}^{m}|x_n+y_n|^2 &\le \left[\left(\textstyle\sum_{n=1}^{m}|x_n|^2\right)^{\frac12}+\left(\textstyle\sum_{n=1}^{m}|y_n|^2\right)^{\frac12}\right]^2\\ &\le (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2\end{aligned}$$

לכן סדרת הסכומים החלקיים $\sum_{n=1}^{m}|x_n+y_n|^2$ היא מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה על ידי $(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2$. הוכחנו כי $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\ell_2$.

דוגמא 1.12: אי-השוויון של קושי-שוורץ במרחב הפונקציות הרציפות $C[a,b]$ נותן

$$\left|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx\right|^2 \le \left(\int_a^b|f(x)|^2dx\right)\left(\int_a^b|g(x)|^2dx\right).$$

תרגילים

1. הוכח כי "הנורמות" שהוגדרו בדוגמאות **1.6-1.8** הן אכן נורמות.

2. א. הוכח כי לכל $f,g\in C[a,b]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

מתקיים השוויון

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b|f(x)g(y)-g(x)f(y)|^2\,dx\,dy=\|f\|^2\cdot\|g\|^2-|\langle f,g\rangle|^2.$$

ב. על ידי אי-השוויון הקודם הוכח את אי-שוויון קושי-שוורץ עבור המרחב $C[a,b]$.

3. יהי V מרחב בעל מכפלה פנימית, $u,v\in V$, ו- $u,v\neq\vec{0}$.

א. הראה כי $\langle u,v\rangle=\|u\|\cdot\|v\|$ אם ורק אם $u=av$, כאשר $a\in\mathbb{C}$.

ב. הראה כי $\|u+v\|=\|u\|+\|v\|$ אם ורק אם $u=av$, כאשר $a\geq 0$.

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכח שלכל $u,v\in V$ מתקיים "חוק המקבילית"

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2.$$

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי. הוכח שלכל $u,v\in V$ מתקיים

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

6. יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב. הוכח שלכל $u,v\in V$ מתקיים

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2+\frac{i}{4}\|u+iv\|^2-\frac{i}{4}\|u-iv\|^2.$$

7. על סמך שני התרגילים הקודמים, הוכח שבכל מרחב נורמה המקיים את חוק המקבילית ניתן להגדיר מכפלה פנימית אשר עליה הנורמה מבוססת.

8. הוכח שלכל n מספרים ממשיים x_1, x_2, ..., x_n מתקיים אי-השוויון

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right|\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. מערכות אורתוגונליות ומערכות אורתונורמליות

הגדרה 1.8: יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $u, v \in V$. נאמר כי u ו־ v **ניצבים** אחד לשני או **אורתוגונליים** (orthogonal) אם $\langle u, v\rangle = 0$. ניתן לסמן עובדה זו על ידי $u \perp v$.

הגדרה 1.9: יהי V מרחב מכפלה פנימית. סדרה סופית $\{u_k\}_{k=1}^n$ או סדרה אינסופית $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ של וקטורים ב־ V נקראת **מערכת אורתוגונלית** אם לכל k, $u_k \neq \vec{0}$, ולכל $k \neq j$ מתקיים $u_k \perp u_j$. אם, בנוסף לכך, מתקיים גם התנאי $\|u_k\| = 1$ לכל k אז הסדרה נקראת **מערכת אורתונורמלית**.

כל וקטור $u \in V$ אשר אורכו 1 ($\|u\| = 1$) נקרא **וקטור יחידה** (unit vector). לכן, נוכל לומר כי מערכת אורתונורמלית היא מערכת אורתוגונלית אשר כל איבריה הם וקטורי יחידה. אם נתונה לנו מערכת אורתוגונלית $\{u_k\}_{k=1}^n$ (כאשר n מספר טבעי או אינסוף) נוכל לקבל ממנה בקלות מערכת אורתונורמלית על ידי "נירמול" כל אחד מן הוקטורים שבמערכת: לכל k, יהי $e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$. ברור כי לכל k, $\|e_k\| = 1$, ולכל $j \neq k$, $e_k \perp e_j$. לכן $\{e_k\}_{k=1}^n$ היא מערכת אורתונורמלית מאותו סדר גודל של המערכת האורתוגונלית המקורית. עובדה יותר חשובה היא ש־ $\text{span}\{e_k\}_{k=1}^n = \text{span}\{u_k\}_{k=1}^n$.

טענה 1.10: תהי $\{u_k\}_{k=1}^n$ מערכת אורתוגונלית סופית במרחב מכפלה פנימית V. אזי סדרת הוקטורים $\{u_k\}_{k=1}^n$ בלתי תלויה ליניארית.

הוכחה: נניח כי

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = \vec{0}, \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

אזי, לכל $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \vec{0}, u_k \right\rangle &= \langle a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n, u_k\rangle \\ &= a_1 \langle u_1, u_k\rangle + a_2 \langle u_2, u_k\rangle + \cdots + a_k \langle u_k, u_k\rangle + \cdots + a_n \langle u_n, u_k\rangle \\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot \langle u_k, u_k\rangle + \cdots + a_n \cdot 0 \\ &= a_k \langle u_k, u_k\rangle \end{aligned}$$

מאחר ו־ $0 \neq \|u_k\|^2 = \langle u_k, u_k\rangle$, הרי ש־ $a_k = 0$. יוצא שלכל $1 \leq k \leq n$, בהכרח $a_k = 0$, ולכן סדרת הוקטורים $\{u_k\}_{k=1}^n$ היא בלתי-תלויה ליניארית. ∎

נשאלת השאלה: תהי $\{v_k\}_{k=1}^n$ סדרת וקטורים סופית ובלתי תלויה ליניארית במרחב מכפלה פנימית V. האם קיימת מערכת אורתונורמלית $\{e_k\}_{k=1}^n$ כך ש־

$$\operatorname{span}\{e_k\}_{k=1}^n = \operatorname{span}\{v_k\}_{k=1}^n ?$$

ואם כן, האם קיימת דרך להגיע למערכת $\{e_k\}_{k=1}^n$ מן הסדרה המקורית $\{v_k\}_{k=1}^n$? התשובה לשתי השאלות היא חיובית, ותהליך ידוע שבאמצעותו בונים את מערכת אורתונורמלית מן הסדרה המקורית נקרא **תהליך גרם-שמידט**, אותו נתאר בקצרה בסעיף הבא.

אחד היתרונות שיש למערכת אורתונורמלית הוא הקלות היחסית של מציאת המקדמים בפיתוח של כל וקטור הנפרש על ידה כצירוף ליניארי.

טענה 1.11: **יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_1, \ldots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־ V. אם $u = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ אזי לכל $1 \le k \le n$, $a_k = \langle u, e_k\rangle$.**

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\langle u, e_k\rangle &= \langle a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n, e_k\rangle \\
&= a_1\langle e_1, e_k\rangle + a_2\langle e_2, e_k\rangle + \cdots + a_k\langle e_k, e_k\rangle + \cdots + a_n\langle e_n, e_k\rangle \\
&= a_1{\cdot}0 + a_2{\cdot}0 + \cdots + a_k{\cdot}1 + \cdots + a_n{\cdot}0 \\
&= a_k
\end{aligned}$$

■

יוצא ממשפט זה שאם $\{e_1, \ldots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית, אזי לכל וקטור u הנפרש על ידה מתקיים השוויון

$$u = \sum_{k=1}^n a_k e_k = \sum_{k=1}^n \langle u, e_k\rangle e_k .$$

המקדם a_k נקבע באופן יחיד על ידי הנוסחה $a_k = \langle u, e_k\rangle$. לכן הוא תלוי רק בוקטור e_k ולא באף אחד מן הוקטורים האחרים! באופן כללי, אם $u \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, כאשר $\{v_1, \ldots, v_n\}$ אינה מערכת אורתונורמלית, אז כל אחד מן המקדמים a_k בפיתוח של u כצירוף ליניארי יהיה תלוי בכל הוקטורים $\{v_1, \ldots, v_n\}$. הטענה האחרונה משמשת בסיס להגדרה יותר רחבה.

הגדרה 1.12: יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_k\}_{k=1}^n$ מערכת אורתונורמלית בתוכו (כאשר n סופי או אינסופי). יהי $u \in V$. המספרים $\langle u, e_k\rangle$ נקראים **מקדמי פורייה מוכללים** (generalized Fourier coefficients) של הוקטור u ביחס למערכת האורתונורמלית הנתונה.

תכונה נוספת שיש למערכות אורתונורמליות, שמסייעת לחישובי מכפלות פנימיות, מובאת בטענה הבאה.

טענה 1.13: יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_1, \ldots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־ V. אם $\{a_k\}_{k=1}^n$ ו־ $\{b_k\}_{k=1}^n$ סדרות כלשהן של סקלרים, אזי

$$\left\langle \sum_{k=1}^n a_k e_k, \sum_{k=1}^n b_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_k \overline{b_k}.$$

ההוכחה דומה להוכחת טענה **1.10** או טענה **1.11**. נציין שבמקרה הכללי (כאשר המערכת אינה אורתוגונלית) בדרך כלל עשויים להדרש n^2 מכפלות שונות בכדי לקבל את התוצאה.

את המשפט הבא ניתן לראות כהכללה מיידית של משפט פיתגורס למרחבי מכפלה פנימית.

משפט 1.14: (משפט פיתגורס המוכלל) יהי V מרחב מכפלה פנימית

א. תהי $\{u_1, \ldots, u_n\}$ מערכת אורתוגונלית ב־ V, ויהיו $\{a_1, \ldots, a_n\}$ סקלרים. אזי

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|u_k\|^2.$$

ב. תהי $\{e_1, \ldots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־ V. אזי לכל $u \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^n |\left\langle u, e_k \right\rangle|^2.$$

הוכחה:

א. נסתמך על טענה **1.13**.

$$\|\textstyle\sum_{k=1}^n a_k u_k\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^n a_k u_k, \sum_{j=1}^n a_j u_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \overline{a}_j \left\langle u_k, u_j \right\rangle$$

$$= \textstyle\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|u_k\|^2$$

ב. תוצאה מידית מסעיף א' ומטענה **1.11**. ∎

ניתן לראות בחלק ב' של משפט זה הכללה טבעית של מושג הנורמה האוקלידית על $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$. שכן, מן האיזומורפיזם הקיים בין $W = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ ו־ $\mathbb{C}^n$ (בהנחה ש־ V הוא מרחב ליניארי מרוכב), נוכל לזהות כל וקטור $u \in W$ עם סדרת מקדמי פורייה המוכללים שלו $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. המשפט האחרון למעשה טוען כי $\|u\| = \|(a_1, \ldots, a_n)\|$, כאשר הנורמה שבצד ימין היא הנורמה הסטנדרטית על $\mathbb{C}^n$. לכן, כמרחבי מכפלה פנימית, לא קיים הבדל מהותי בין W ובין $\mathbb{C}^n$!

תרגילים

1. יהי $C[-1,1]$ מרחב הפונקציות הרציפות $f:[-1,1]\to\mathbb{C}$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

א. יהיו $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, ו־ $P_2(x)=1-3x^2$. הוכח כי קבוצה זו של פולינומים היא אורתוגונלית ב־ $C[-1,1]$.

ב. מצא קבועים מתאימים a, b, ו־ c כך שהפונקציה

$$P_3(x)=a+bx+cx^2+x^3$$

תהיה ניצבת לכל אחת מן הפונקציות הקודמות.

2. יהי $\mathcal{P}_2$ מרחב כל הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל־ 2. לכל $f,g\in\mathcal{P}_2$ נגדיר

$$\langle f,g\rangle = \int_{0}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx\,.$$

א. הוכח כי זוהי מכפלה פנימית על $\mathcal{P}_2$.

ב. הראה שהקבוצה $\{1,\ 1-x,\ 1-2x+\frac{1}{2}x^2\}$ היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה פנימית זו.

3. יהי $C^1[0,1]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ בעלות נגזרת רציפה על כל הקטע $[0,1]$.

א. הוכח כי

$$\langle f,g\rangle = f(0)\cdot\overline{g(0)}+\int_{0}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx$$

היא מכפלה פנימית על $C^1[0,1]$.

ב. מצא מערכת אורתונורמלית $\{h_1,h_2,h_3\}$ ב־ $C^1[0,1]$ ביחס למכפלה פנימית זו כך ש־

$$\operatorname{span}\{h_1,h_2,h_3\}=\operatorname{span}\{1,x,x^2\}.$$

4. היטלים אורתוגונליים או קירוב בממוצע

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_1,\ldots,e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־ V. נגדיר $W=\mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_n\}$. יהי $u\in V$ וקטור כלשהו. בסעיף הקודם הגדרנו את המקדמי פוריה המוכללים של u להיות $\langle u,e_k\rangle$. אם $u\notin W$ אז ברור כי $u\neq\sum_{k=1}^n\langle u,e_k\rangle e_k$. נשאלת השאלה האם, למרות זאת, קיים יחס משמעותי בין u לבין $\sum_{k=1}^n\langle u,e_k\rangle e_k$? בסעיף זה ננסה לתת תשובה מפורטת לשאלה זו.

עבור כל $u\in V$, נסמן $\tilde{u}=\sum_{k=1}^n\langle u,e_k\rangle e_k$. הוקטור $\tilde{u}$ יקרא **ההיטל האורתוגונלי** של u **על** W.

טענה 1.15: עבור כל $u\in V$,

א. $\langle u-\tilde{u},w\rangle=0$, **לכל** $w\in W$.

ב. $\|u-w\|^2=\|u-\tilde{u}\|^2+\|\tilde{u}-w\|^2$, **לכל** $w\in W$.

הערה: החלק הראשון של הטענה אומר כי הוקטור $u-\tilde{u}$ ניצב לכל וקטור $w\in W$. במקרה כזה אומרים כי $u-\tilde{u}$ ניצב לתת-המרחב W, ורושמים $u-\tilde{u}\perp W$.

הוכחה:

א. נוכיח תחילה כי $\langle u-\tilde{u},e_j\rangle=0$, לכל $1\le j\le n$.

$$\langle u-\tilde{u},e_j\rangle=\langle u,e_j\rangle-\left\langle\sum_{k=1}^n\langle u,e_k\rangle e_k,e_j\right\rangle=\langle u,e_j\rangle-\sum_{k=1}^n\langle u,e_k\rangle\langle e_k,e_j\rangle$$
$$=\langle u,e_j\rangle-\langle u,e_j\rangle\langle e_j,e_j\rangle=\langle u,e_j\rangle-\langle u,e_j\rangle=0$$

אם עכשיו נקח $w\in W$ כלשהו, אזי $w=\sum_{j=1}^n b_je_j$, ו־

$$\langle u-\tilde{u},w\rangle=\left\langle u-\tilde{u},\sum_{j=1}^n b_je_j\right\rangle=\sum_{j=1}^n\overline{b_j}\langle u-\tilde{u},e_j\rangle=\sum_{j=1}^n\overline{b_j}\cdot 0=0\ .$$

ב. על פי חלק א', $(u-\tilde{u})\perp w$, לכל $w\in W$. מכך יוצא מייד כי $(u-\tilde{u})\perp(\tilde{u}-w)$, כי $\tilde{u}-w\in W$. לכן ממשפט **1.14**.א' נקבל

$$\|u-w\|^2=\|u-\tilde{u}+\tilde{u}-w\|^2=\|u-\tilde{u}\|^2+\|\tilde{u}-w\|^2$$

והוכחת המשפט הסתיימה. ∎

שימושים של התוצאה האחרונה יבואו לאחר ההגדרה הבאה של מושג המרחק (אותו כבר פגשנו בסעיף **1.2**).

הגדרה 1.16: יהי V מרחב מכפלה פנימית. לכל $u, v \in V$, **המרחק** (distance) בין u ו־ v הוא המספר הממשי האי-שלילי $\|u-v\|$.

בכדי שהשימוש בשם "מרחק" יהיה מוצדק ביחס למושג המרחק המוכר לנו מגאומטריה אויקלידית, עליו להיות בעל מספר תכונות יסודיות שנפרט להלן:

א. לכל $u, v \in V$, $\|u-v\| = \|v-u\|$. באופן מילולי: המרחק בין u ו־ v שווה למרחק בין v ו־ u.

ב. לכל $u \in V$, $\|u-u\| = 0$. כלומר: המרחק בין u לעצמו הוא אפס.

ג. לכל $u, v \in V$, אם $\|u-v\| = 0$ אז $u = v$. כלומר: אם המרחק בין u ו־ v הוא אפס, אזי $u = v$.

ד. לכל $u, v, w \in V$, $\|u-w\| \leq \|u-v\| + \|v-w\|$. כלומר: המרחק בין u ו־ w תמיד קטן או שווה לסכום המרחקים של u ו־ w מנקודה שלישית v.

התכונות א-ג נובעות מייד מהגדרת הנורמה. תכונה ד' נובעת בקלות מאי-שוויון המשולש

$$\|u-w\| = \|u-v+v-w\| \leq \|u-v\| + \|v-w\|.$$

משפט 1.17: יהי V מרחב מכפלה פנימית, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ מערכת אורתונורמלית ב־ V. ו־ $W = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$. יהי $u \in V$. אזי הוקטור $\tilde{u} = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k$ הינו הוקטור הקרוב ביותר ל־ u השייך ל־ W. יתרה מזאת, $\tilde{u}$ הוא הוקטור היחיד ב־ W אשר מרחקו מ־ u מינימלי.

הוכחה: עלינו להראות כי $\|u-\tilde{u}\| \leq \|u-w\|$, לכל $w \in W$. זה נובע מייד מן החלק השני של טענה **1.15**. לכל $w \in W$,

$$\|u-w\|^2 = \|u-\tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u}-w\|^2$$

ולכן $\|u-\tilde{u}\| \leq \|u-w\|$, לכל $w \in W$. לגבי היחידות של $\tilde{u}$, ברור מאותו שוויון שאם $\|u-\tilde{u}\| = \|u-w\|$, עבור $w \in W$, אזי $\|\tilde{u}-w\| = 0$, ולכן $w = \tilde{u}$. ∎

תשובה אחת לשאלה ששאלנו בתחילת הסעיף היא: הוקטור $\tilde{u}$ הוא הנציג "הקרוב ביותר" ל־ u השייך ל־ W. תשובה מלאה יותר לשאלה תתקבל לאחר שנבין כיצד $\tilde{u}$ עשוי לייצג את u, ולאיזו מטרה.

דוגמא 1.12: עבור המרחב הליניארי $C[-1,1]$, הנורמה

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

נובעת מהמכפלה הפנימית

$$.\ \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

בכדי למצוא את הקירוב הטוב ביותר עבור $f\in C[-1,1]$ בתת-המרחב $W=\operatorname{span}\{1,x\}$ עלינו למצוא סקלרים a^* ו- b^* המקיימים

$$\|f-(a^*+b^*x)\| \le \|f-(a+bx)\|$$

לכל $a,b\in\mathbb{C}$. הפונקציות $e_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ו- $e_2(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}x$ מהוות בסיס אורתונורמלי למרחב W. לכן בעייה זו שקולה למציאת סקלרים c^* ו- d^* המקיימים

$$\|f-(c^*e_1+d^*e_2)\| \le \|f-(ce_1+de_2)\|$$

לכל $c,d\in\mathbb{C}$. ממשפט **1.17** נובע שקיים פתרון יחיד לבעייה זו והוא

$$.c^*=\langle f,e_1\rangle\,,\qquad d^*=\langle f,e_2\rangle$$

אם, למשל, $f(x)=x^3$ אזי

$$c^*=\langle f,e_1\rangle=\int_{-1}^{1} x^3\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx=0$$

$$.d^*=\langle f,e_2\rangle=\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\,dx=\frac{\sqrt{6}}{5}$$

לכן

$$c^*e_1(x)+d^*e_2(x)=\frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x=\frac{3}{5}x$$

הוא הקירוב הטוב ביותר ל- x^3 בתוך W ביחס לנורמה הנ"ל.

תוצאה נוספת שנובעת מייד מטענה **1.15** היא

טענה 1.18: תהי $\{e_1,\ldots,e_n\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית V. אזי לכל $u\in V$ מתקיים אי-השוויון

$$.\ \sum_{k=1}^{n} |\langle u,e_k\rangle|^2 \le \|u\|^2$$

הוכחה: נציב $w=\vec{0}$ בחלק ב' של טענה **1.15** ונקבל

$$.\|u\|^2=\|u-\tilde{u}\|^2+\|\tilde{u}\|^2$$

לכן $\|\tilde{u}\|^2 \le \|u\|^2$. ממשפט **1.14**ב'

$$\|\tilde{u}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k \rangle|^2$$

ומכאן נובעת הטענה. ∎

לא קשה לראות כי השוויון $\sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k \rangle|^2 = \|u\|^2$ מתקיים אם ורק אם $u \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

תהליך גרם-שמידט

יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{v_1, \ldots, v_n\}$ סדרה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב-V. נתאר תהליך אשר באמצעותו נקבל סדרה אורתונורמלית $\{e_1, \ldots, e_n\}$ של וקטורים ב-V כך ש-

$$\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

התהליך מורכב מ-n שלבים כאשר בשלב k, $1 \le k \le n$, נבנה את הוקטור e_k באופן כזה שיתקיים

$$\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\}.$$

שלב 1: מן העובדה שהסדרה $\{v_1, \ldots, v_n\}$ היא בלתי תלויה ליניארית נובע כי $v_1 \neq \vec{0}$, ולכן נוכל להגדיר את e_1 על ידי

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

ברור כי $\|e_1\| = 1$ וכי $\mathrm{span}\{v_1\} = \mathrm{span}\{e_1\}$.

שלב 2: יהי $W_1 = \mathrm{span}\{e_1\}$ ויהי $\tilde{v}_2 = \langle v_2, e_1 \rangle e_1$ ההיטל האורתוגונלי של v_2 על W_1. על פי טענה **1.15**א, $v_2 - \tilde{v}_2 \perp e_1$, ובנוסף לכך $v_2 - \tilde{v}_2 \neq \vec{0}$ משום שאחרת נקבל כי $v_2 \in W_1$ בסתירה לעובדה שהקבוצה $\{v_1, v_2\}$ בלתי תלויה ליניארית. לכן אם נגדיר

$$e_2 = \frac{v_2 - \tilde{v}_2}{\|v_2 - \tilde{v}_2\|}$$

אז נקבל ש-$e_1 \perp e_2$, $\|e_2\| = 1$, ו-$\mathrm{span}\{e_1, e_2\} = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$. במילים אחרות, הסדרה $\{e_1, e_2\}$ היא סדרה אורתונורמלית הפורשת את אותו התת-מרחב שנפרש על ידי $\{v_1, v_2\}$.

שלב k: יהי $W_{k-1} = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ ויהי $\tilde{v}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, e_j \rangle e_j$ ההיטל האורתוגונלי של v_k על W_{k-1}. על פי טענה **1.15**א, $v_k - \tilde{v}_k \perp W_{k-1}$, ובנוסף לכך

$\vec{0} \neq v_k - \tilde{v}_k$. לכן, אם נגדיר

$$e_k = \frac{v_k - \tilde{v}_k}{||v_k - \tilde{v}_k||}$$

אז נקבל שוב כי $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ וש־ $\{e_1, \dots, e_k\}$ היא סדרה אורתונורמלית.

נוכל להמשיך באותו אופן עד לשלב n בו נקבל את המערכת האורתונורמלית $\{e_1, \dots, e_n\}$ הרצויה.

תרגילים

1. תהי $f \in C[-\pi, \pi]$. לכל $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ נגדיר

$$.F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta \cos x - \gamma \cos 10x|^2 dx$$

הוכח כי F מקבלת ערך קטן ביותר בדיוק בנקודה אחת $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ומצא נקודה זו כאשר

א. $f(x) = \cos^2 x$ ב. $f(x) = x^3$ ג. $f(x) = \sin x$

ד. $f(x) = 1 - 2\cos x$ ה. $f(x) = |x|$ ו. $f(x) = |\sin x|$

2. במרחב $C[0, 2\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית

$$.\ \langle f, g \rangle = \int_{0}^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

א. הוכח כי הקבוצה $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right\}$ היא מערכת אורתונורמלית.

ב. יהי W תת-המרחב הנפרש על ידי S, ותהי $f(x) = x$ בקטע $[0, 2\pi]$. מצא את הפונקציה g שנפרשת על ידי S שהיא הכי קרובה ל־ f (כלומר $||f - g||$ מינימלי).

3. יהי $C[-\pi, \pi]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

ויהי $W = \operatorname{span}\{1,\ \sin x,\ \cos x,\ x\}$, ותהי $f(x) = |x|$. מצא פונקציה $g \in W$ כך שהערך של $||f - g||$ יהיה הקטן ביותר.

4. לכל $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ נגדיר

$$.F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x-\alpha-\beta\cos x-\gamma\sin 2x|^2dx$$

הראה כי F מקבלת ערך מינימלי בנקודה אחת בלבד ומצא נקודה זו.

5. במרחב $C[-1,1]$ נתונות הפונקציות

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x+a,\ f_2(x)=x^2+bx+c,\ f_3(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$$

וידוע כי הקבוצה $\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ היא מערכת אורתוגונלית ב־ $C[-1,1]$ ביחס למכפלה הפנימית

$$.\ \langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

א. חשב את a, b, c.

ב. לכל $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ נגדיר

$$.F(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\int_{-1}^{1}|x^4-\alpha f_0(x)-\beta f_1(x)-\gamma f_2(x)-\delta f_3(x)|^2dx$$

הוכח ש־ F מקבלת ערך קטן ביותר בנקודה אחת בדיוק, ומצא נקודה זו.

5. מערכות אורתונורמליות אינסופיות

יהי V מרחב מכפלה פנימית. בסעיף זה נניח כי $\dim(V)=\infty$. תהי $\{e_1,e_2,\ldots\}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית בתוכו. נציין כי מושג הבסיס למרחב וקטורי מימד אינסופי הוא בעייתי, ולכן אין להתייחס למערכת האורתונורמלית כאל בסיס או אפילו כקבוצה פורשת עבור V או עבור תת-מרחב של V. מאוחר יותר נחזור לנקודה בעייתית זו.

משפט 1.19: (אי-שוויון בסל, Bessel) **לכל** $u\in V$**, הטור** $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2$ **מתכנס, ובנוסף לכך מתקיים אי-השוויון**

$$.\ \sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2\le\|u\|^2$$

הוכחה: זוהי תוצאה מיידית של טענה **1.18**. לכל m,

$$.S_m=\sum_{n=1}^{m}|\langle u,e_n\rangle|^2\le\|u\|^2$$

כלומר, הסדרה $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה על ידי המספר $\|u\|^2$. מאחר וזוהי סדרה מונוטונית עולה, הרי שהיא מתכנסת לגבול סופי, ובנוסף לכך

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}|\langle u,e_n\rangle|^2\le\|u\|^2 .$$

מכך נקבל את אי-השוויון של בסל. ■

במידה ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2=\|u\|^2$ אז אומרים כי מתקיים שוויון פרסבל (Parseval) עבור u. תוצאה מיידית מאי-שוויון בסל היא:

משפט 1.20: (הלמה של רימן-לבג, Riemann-Lebesgue) **תהי** $\{e_1,e_2,\ldots\}$ **מערכת אורתונורמלית אינסופית במרחב מכפלה פנימית** V**, ויהי** $u\in V$**. אזי**

$$\lim_{n\to\infty}\langle u,e_n\rangle=0 .$$

הוכחה: על פי אי-שוויון בסל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,e_n\rangle|^2$ מתכנס. ידוע כי אם טור מתכנס אז האיבר ה־n־י שלו שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף. ■

כפי שאמרנו בתחילת הסעיף, מושג הבסיס במרחב ליניארי ממימד אינסופי הוא בעייתי ויש לטפל בו בזהירות רבה. אחת הבעיות הראשונות שעולות בהקשר זה היא כיצד נגדיר מהו "צירוף ליניארי אינסופי"? נחדד את השאלה: יהי V מרחב מכפלה פנימית, תהי $\{u_1,u_2,\ldots\}$ קבוצה אינסופית של וקטורים בתוכו, ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת סקלרים. האם נוכל להעניק מובן כלשהו לביטוי "$\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n$"? מדובר בסכום אינסופי של וקטורים

$$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n+\cdots$$

ולאו דוקא בסכום אינסופי של מספרים! גם אם נצליח להעניק מובן למהו סכום אינסופי של וקטורים, יהיה עלינו בנוסף לכך לודא שתחת מובן זה יישמרו מספר תכונות רצויות שיש לבסיסים סופיים. בכדי להשיג את מטרה זו נגייס לעזרתנו את מושג ההתכנסות בנורמה (שכמובן תלוי רק במושג הנורמה).

הגדרה 1.21: **תהי** $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ **סדרה אינסופית של וקטורים במרחב עם נורמה** V**. נאמר כי הסדרה *מתכנסת בנורמה* לוקטור** $w\in V$ **אם**

$$\lim_{m\to\infty}\|w-w_m\|=0 .$$

כלומר, לכל $\epsilon>0$ **קיים מספר טבעי** $m(\epsilon)$ **כך שלכל** $m\ge m(\epsilon)$, $\|w-w_m\|<\epsilon$.

כעת נוכל לתת משמעות למהו "צירוף ליניארי אינסופי".

הגדרה 1.22: תהי $\{u_1, u_2, \ldots\}$ סדרה אינסופית של וקטורים במרחב עם נורמה V, ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת סקלרים. נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ **מתכנס בנורמה** לוקטור $w \in V$, ונרשום $w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$, אם סדרת **הסכומים החלקיים** $w_m = \sum_{n=1}^{m} a_n u_n$ מתכנסת בנורמה ל־ w. במילים אחרות, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ מתכנס בנורמה לוקטור w אם

$$\lim_{m\to\infty} \left\| w - \sum_{n=1}^{m} a_n u_n \right\| = 0 .$$

משמעות הביטוי "הוקטור w נפרש על ידי הסדרה האינסופית $\{u_1, u_2, \ldots\}$" הוא שקיימת סדרה מתאימה של סקלרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שעבור כל m, הצירוף $a_1u_1 + \cdots + a_mu_m$ הוא קירוב יותר ויותר טוב לוקטור w, ככל ש־ m הולך וגדל. הקירבה בין וקטורים במרחב בעל נורמה נמדדת על פי המרחק שביניהן, ולכן המשמעות המדויקת של הטענה הקודמת היא שעבור כל $\epsilon > 0$, קטן כרצוננו, קיים $m(\epsilon)$ כך שלכל $m \geq m(\epsilon)$,

$$\|w - (a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m)\| < \epsilon .$$

כעת באפשרותנו לנסח תכונה הרצויה לנו לגבי מערכת אורתונורמלית.

הגדרה 1.23: תהי $\{e_1, e_2, \ldots\}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית במרחב מכפלה פנימית V. נאמר שהמערכת היא **סגורה** ב־ V אם לכל $u \in V$ מתקיים

$$\lim_{m\to\infty} \left\| u - \sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n \rangle e_n \right\| = 0 .$$

נזכור כי $\sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n \rangle e_n$ הוא הוקטור הקרוב ביותר ל־ u במרחב $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$. עצם הגדרת התכונה אינה מבטיחה לנו את קיומה בפועל. נצטרך לטרוח לא מעט בפרק הבא על מנת להוכיח שהיא אכן מתקיימת בדוגמא החשובה לנו. בינתיים ננסח תכונה נוספת, השקולה לתכונת הסגירות.

טענה 1.24: המערכת האורתונורמלית $\{e_1, e_2, \ldots\}$ סגורה במרחב מכפלה פנימית V אם ורק אם לכל $u \in V$ מתקיים השוויון

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 = \|u\|^2 .$$

כלומר, תכונת הסגירות שקולה לקיום שוויון פרסבל לכל $u \in V$.

הוכחה: לכל m טבעי, יהי $V_m = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$, ויהי $u_m = \sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n\rangle e_n$ ההיטל האורתוגונלי של u על V_m. על פי טענה **1.15**ב, אם נציב שם $w = \vec{0}$, נקבל

$$\|u\|^2 = \|u - u_m\|^2 + \|u_m\|^2$$

ולכן

$$\left\|u - \sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n\rangle e_n\right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle u, e_n\rangle|^2 .$$

אזי הטענה

$$\lim_{m\to\infty} \left\|u - \sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n\rangle e_n\right\|^2 = 0$$

שקולה לטענה

$$\lim_{m\to\infty} \left(\|u\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle u, e_n\rangle|^2\right) = 0 .$$

ברור לנו כי הטענה $\lim_{m\to\infty} \left(\|u\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle u, e_n\rangle|^2\right) = 0$ שקולה לשוויון פרסבל $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2$. ∎

מושג חשוב נוסף הקשור למערכת אורתונורמלית אינסופית הוא מושג **השלמות**.

הגדרה 1.25: תהי $\{e_1, e_2, \ldots\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית V. נאמר כי המערכת היא **שלמה** ב־ V אם הוקטור היחיד המקיים את התנאי

$$\langle u, e_n\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

הוא וקטור האפס $u = \vec{0}$.

ברור שתכונת השלמות רצויה לנו עבור "בסיס" כלשהו. שים לב שקל מאוד לבנות מערכת אורתונורמלית לא שלמה וגם לא סגורה (פשוט נקח מערכת אורתונורמלית כלשהיא ונזרוק את אחד מאיבריה). מתברר שמושג השלמות הוא חלש יותר ממושג הסגירות (ואינו שקול לו).

טענה 1.26: אם $\{e_1, e_2, \ldots\}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב־ V אזי היא שלמה ב־ V.

הוכחה: נניח שהמערכת סגורה. יהי $u \in V$ וקטור שמקיים את תנאי **(1.3)**. על פי טענה **1.24**

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |0|^2 = 0$$

ולכן בהכרח $u = \vec{0}$. ∎

אם המערכת $\{e_1, e_2, \dots\}$ אינה סגורה אזי הסכום $\sum_{n=1}^{m} \langle u, e_n \rangle e_n$ אינו בהכרח קרוב ל־ u, בלא קשר לכמה m גדול. לפעמים גם אם המערכת סגורה, האופן בו הסכום הנ"ל מתקרב ל־ u אינו מספיק טוב למטרות מסוימות, ואז יש לנסות ולמצוא מערכת אורתונורמלית טובה יותר.

נסיים את הפרק בהכללה של שוויון פרסבל.

טענה 1.27: (שוויון פרסבל מוכלל) **יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_1, e_2, \dots\}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב־ V. יהיו $u, v \in V$, $a_n = \langle u, e_n \rangle$, ו־ $b_n = \langle v, e_n \rangle$. אזי**

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

הוכחה: נשתמש בזהות

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 + \frac{i}{4}\|u+iv\|^2 - \frac{i}{4}\|u-iv\|^2 \tag{1.4}$$

(ראה תרגיל **6** בסעיף **1.2**). מאחר והמערכת האורתונורמלית $\{e_1, e_2, \dots\}$ סגורה ב־ V הרי שמטענה **1.24** נובעים כל ארבעת השוויונים הבאים

$$\|u+v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2$$
$$\|u-v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2$$
$$\|u+iv\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + ib_n|^2$$
$$\|u-iv\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - ib_n|^2.$$

על ידי שימוש בזהויות אלה בנוסחה **(1.4)**, ועל ידי שימוש בזהות

$$a_n\overline{b_n} = \frac{1}{4}|a_n + b_n|^2 - \frac{1}{4}|a_n - b_n|^2 + \frac{i}{4}|a_n + ib_n|^2 - \frac{i}{4}|a_n - ib_n|^2$$

נקבל את התוצאה. ∎

תרגילים

1. תהי $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית V, ויהי $v \in V$ כך ש־

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$$

הוכח כי לכל n,

$$a_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \langle v, u_n \rangle.$$

2. לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר פונקציה $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \sqrt{n}, & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

הוכח כי סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית לאפס על כל הקטע $[0,1]$ אך אינה מתכנסת לפונקצית האפס בנורמה

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. מצא סדרת פונקציות במרחב $C[0,\infty)$ שמתכנסת במידה שווה לאפס על כל הקטע $[0,\infty)$, אך אינה מתכנסת לפונקצית האפס בנורמה

$$\|f\| = \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב־ V. נגדיר

$$f_{2n-1} = \frac{e_{2n} - e_{2n-1}}{\sqrt{2}}, \quad f_{2n} = \frac{e_{2n} + e_{2n-1}}{\sqrt{2}}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

הוכח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ גם היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב־ V.

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית.

א. הוכח כי לכל $u, v \in V$, $\Big| \|u\| - \|v\| \Big| \le \|u - v\|$.

ב. תהי $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת וקטורים ב־ V, המתכנסת בנורמה לוקטור $u \in V$ (כלומר $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\| = 0$). הוכח כי $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u\|$.

תרגילים לחזרה כללית

1. יהי $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ עגול היחידה הפתוח ב־ $\mathbb{R}^2$, ויהי $C(\mathcal{D})$ אוסף כל הפונקציות הרציפות $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. לכל $f,g \in C(\mathcal{D})$ נגדיר

$$\langle f,g\rangle = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\overline{g(x,y)}\,dx\,dy$$

ולכל n טבעי תהי

$$f_n(x,y) = (x+iy)^n$$

א. הוכח כי $\langle f,g\rangle$ היא מכפלה פנימית על $C(\mathcal{D})$.

ב. הוכח כי סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית ב־ $C(\mathcal{D})$.

2. לכל $f,g \in C[-1,1]$ נגדיר

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

א. הוכח כי זוהי מכפלה פנימית על $C[-1,1]$.

ב. לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר פונקציה T_n ב־ $C[-1,1]$ על ידי

$$.T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

הפונקציה T_n נקראת **פולינום צ׳בישב** (Chebyshev). הוכח כי סדרת הפונקציות $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית במרחב $C[-1,1]$.

ג. על ידי ההצבה $\theta = \arccos x$, הוכח כי לכל n, $T_n(x)$ היא למעשה פולינום ממעלה n במשתנה x.

3. הפולינומים של לג׳נדר (Legendre) הם:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

א. הוכח כי

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

ולכן $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית במרחב $C[-1,1]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx \,.$$

ב. תהי

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

בטא את f כצרוף ליניארי של הפולינומים של לג'נדר.

4. יהי N מספר טבעי נתון. לכל $m = 0,1,\ldots,N-1$ נגדיר וקטור ב- $\mathbb{C}^N$:

$$u_m = \left(1,\ e^{\frac{-2\pi i m}{N}},\ e^{\frac{-4\pi i m}{N}},\ \ldots,\ e^{\frac{-2(N-1)\pi i m}{N}}\right).$$

הוכח כי:

א. סדרת הוקטורים $\{u_m\}_{m=0}^{N-1}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב $\mathbb{C}^N$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ב. לכל $m = 0,1,\ldots,N-1$, $\|u_m\|^2 = N$.

ג. לכל $u \in \mathbb{C}^N$, $u = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \langle u, u_m\rangle\, u_m$.

הערה: וקטור המקדמים $\{\langle u, u_m\rangle\}_{m=0}^{N-1}$ נקרא **ההתמרת פוריה הדיסקרטית** של u (Discrete Fourier Transform).