פרק 2
טורי פוריה

0. הקדמה

בפרק זה נלמד על טורי פוריה. אנו משתמשים בטורי פוריה בכדי להציג או לקרב פונקציות המוגדרות על קטע סופי. במובן זה טורי פוריה דומים לפולינומים או לטורי חזקות, אבל הטור פוריה הוא במובן מה חזק יותר וכללי יותר. הטור פוריה הוא דוגמא אחת למערכת אורתונורמלית אינסופית סגורה במרחב עם מכפלה פנימית. הוא יישום של התאוריה שפתחנו בפרק הקודם. אך לטור פוריה יש גם תכונות ספציפיות משלו, שנלמד עליהן. הטור פוריה הוגדר לראשונה על ידי ז'אן בפטיסט ג'וזף פוריה (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830) לפני כ־200 שנה. פוריה היה מתמטיקאי ומהנדס שפיתח את הטורים הנ"ל בכדי לפתור בעיות מסוימות במשוואות דיפרנציאליות חלקיות. בסעיף האחרון בפרק נביא שימוש אחד מסוג זה. (פוריה השתתף במהפכה הצרפתית וגם פלש עם נפוליון למצריים בשנת 1798. הוא אז נחשב לאחד "החכמים" אשר לוו את נפוליון וסייעו לו בכבושיו. לתקופת מה הוא היה המושל של מצריים התחתית.)

1. הגדרות

על ידי E נסמן את מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין המוגדרות בקטע $[-\pi,\pi]$ והמקבלות ערכים ב־$\mathbb{C}$. נזכיר כי פונקציה $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ נקראת **רציפה למקוטעין** אם יש לה לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות ואם, בנוסף לכך, בכל נקודת אי-רציפות קיימים הגבולות החד-צדדיים (הגבול הימני והגבול השמאלי). נדגיש כי במונח "נקודת אי-רציפות" אנו כוללים גם את האפשרות שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה זו. כל נקודה x אשר בה הגבולות

החד-צדדיים שונים נקראת **נקודת קפיצה** של f. ברור כי סכום (וגם מכפלה) של כל שתי פונקציות רציפות למקוטעין הוא פונקציה רציפה למקוטעין, ומכפלה של פונקציה רציפה למקוטעין בסקלר היא פונקציה רציפה למקוטעין. לכן E הוא מרחב ליניארי. כל פונקציה רציפה למקוטעין f, אשר מקבלת ערכים ב־ $\mathbb{C}$, ניתן להציג תמיד בצורה

$$f = u + iv$$

כאשר u ו־ v הן פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$. הפונקציה u נקראת **החלק הממשי** של f ורושמים $u = \mathrm{Re}(f)$. הפונקציה v נקראת **החלק המדומה** של f ורושמים $v = \mathrm{Im}(f)$.

לכל $f, g \in E$ נגדיר

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \, . \qquad (2.1)$$

האינטגרל קיים כי $f\cdot\overline{g}$ רציפה למקוטעין. על סמך התכונות היסודיות של האינטגרל של רימן, קל להוכיח כי זוהי מכפלה פנימית על E. לכן E הוא מרחב מכפלה פנימית. נציג מערכת אורתונורמלית סגורה ב־ E. במשפט הבא נוכיח את האורתונורמליות.

משפט 2.1: סדרת הפונקציות

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin 3x,\ \cos 3x,\ \dots\right\}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית במרחב E.

הוכחה: עלינו להוכיח כי כל שתי פונקציות שונות בסדרה הן אורתוגונליות ושהנורמה של כל פונקציה בסדרה שווה 1. נתחיל בדבר השני:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

ולכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\sin nx\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin nx|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx = 1$$

$$\|\cos nx\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos nx|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = 1 \, .$$

על מנת להוכיח אורתוגונליות של כל שתי פונקציות שונות בסדרה עלינו להוכיח את חמשת הטענות הבאות:

א. $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx \right\rangle = 0$, $n \in \mathbb{N}$

ב. $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nx \right\rangle = 0$, $n \in \mathbb{N}$

ג. $\langle \sin mx, \cos nx \rangle = 0$, $m, n \in \mathbb{N}$

ד. $\langle \sin mx, \sin nx \rangle = 0$, $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$

ה. $\langle \cos mx, \cos nx \rangle = 0$, $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

כל אחת מן מטענות אלה היא תרגיל קל בפני עצמו. נוכיח שתיים מתוכן כדוגמאות. נתחיל בטענה א':

$$\begin{aligned}\left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx \right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left[-\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{-\cos n\pi + \cos n(-\pi)}{n\pi\sqrt{2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

נוכיח עכשיו את טענה ה'. יהיו $m, n \in \mathbb{N}$ ו־ $m \neq n$. אזי

$$\begin{aligned}\langle \cos mx, \cos nx \rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

הוכחת שאר הטענות דומה. ∎

חשיבות גדולה למערכת הנ"ל נובעת מכך שהיא גם מערכת סגורה ב־ E. עובדה זו קשה להוכיח בשלב זה ולכן נוכיח אותה באופן מלא רק בסעיף **2.6**. אלמלא היתה המערכת הנ"ל סגורה ב־ E, ספק אם היתה חשובה או שימושית.

בפרק הקודם נוכחנו לדעת שאם $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה אז ניתן להציג כל f על ידי "צירוף ליניארי אינסופי" שצורתו הכללית היא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \, e_n .$$

נבדוק בדיוק מהם איברי הטור $\langle f, e_n \rangle \, e_n$ במקרה של המערכת שלנו:

1. אם $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ אזי

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt .$$

2. אם $e_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, אזי

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx .$$

3. אם $e_n(x) = \cos nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, אזי

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\right)\cos nx .$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ עבור המערכת שלנו יהיה מן הצורה

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx] \tag{2.2}$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{2.3}$$

ניתן לטור זה שם פורמלי.

הגדרה 2.2: **תהי f פונקציה נתונה השייכת ל־ E. הטור (2.2) המתאים ל־ f, כאשר ה־ a_n וה־ b_n הוגדרו ב־(2.3), נקרא הטור פורייה (Fourier Series) של f ונסמן עובדה זו על ידי**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הערות:

א. כתיבת הקבוע החופשי של הטור בצורה $\frac{a_0}{2}$ היא נוחה מאחר והמספר a_0 מתקבל מהנוסחה הכללית של a_n ב־**(2.3)** (שהרי $\cos 0 = 1$). על כל פנים, הנוסחה עבור a_0 היא: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

ב. בהגדרת הטור פוריה של f רשמנו $\sim$ ולא שוויון מדויק מאחר ואין שום הכרח שהטור יתכנס עבור כל ערך של x, וגם אם הוא מתכנס עבור ערך מסוים של x, אין שום הכרח שהוא

יתכנס ל־ $f(x)$. עובדה זו נכונה גם כאשר f היא פונקציה רציפה על כל הקטע $[-\pi,\pi]$. נדרשים תנאים יותר חזקים על הפונקציה f בכדי להבטיח את התכנסות הטור לערכים רצויים או בכדי להבטיח שסוג ההתכנסות יהיה מצורה מסוימת (כמו התכנסות במידה שווה או התכנסות נקודתית).

ג. הטור פוריה של f נקבע לחלוטין על ידי המקדמים a_n ו־ b_n (שמספרם הוא בן-מנייה). המקדמים עצמם נקבעים על ידי האינטגרלים המסוימים שבנוסחאות **(2.3)**. ברור שאם נשנה את ערכי הפונקציה f במספר סופי של נקודות אז היא נשארת בתוך המרחב E וגם האינטגרלים המסוימים לא ישתנו כתוצאה מכך. מכאן שלכל שתי פונקציות בתוך E, השונות אחת מן השניה במספר סופי של ערכים, יש אותו טור פוריה.

ד. הטור **(2.2)** של כל פונקציה $f \in E$, במידה והוא מתכנס לכל x, מגדיר למעשה פונקציה מחזורית על כל $\mathbb{R}$, אשר מחזורה הוא 2π (כלומר מקיים $g(x+2\pi) = g(x)$, לכל $x \in \mathbb{R}$). עקב כך, נוח לפעמים לחשוב כי f עצמה היא פונקציה מחזורית המוגדרת על כל $\mathbb{R}$, ושמחזורה גם הוא 2π, או לחלופין ש־ f היא פונקציה המוגדרת על מעגל היחידה, כאשר x מציין את הזוית המתאימה לנקודה על המעגל.

ה. הנורמה שנובעת מן המכפלה הפנימית שהגדרנו בנוסחה **(2.1)** היא

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

לנורמה זו (ולמכפלה הפנימית) על E חסרה התכונה שאם $\|f\| = 0$ אז f היא זהותית אפס. מה שנכון הוא שאם $\|f\| = 0$ אז f זהותית אפס, פרט אולי למספר סופי של נקודות. על הקורא לזהות בין פונקציות ב־ E הנבדלות רק במספר סופי של נקודות (ראה הערה ג').

מההגדרה של הטור פוריה ניתן לראות שהתהליך המתאים לפונקציה את הטור פוריה שלה הוא תהליך ליניארי. כלומר, אם $f, g \in E$ אז הטור פוריה של $f+g$ שווה לטור פוריה של f ועוד הטור פוריה של g (במובן של סכום המקדמים). אם $a \in \mathbb{C}$ אז הטור פוריה של af שווה לטור פוריה של f כפול a (כלומר, מקדמי הטור פוריה של af מתקבלים על ידי הכפלת המקדמים של הטור פוריה של f בסקלר a). שתי התכונות האלה נובעות בקלות מן התכונות הבסיסיות של האינטגרל המסוים.

לפני שנלמד על תכונות שונות של הטור פוריה, נחשב את הטור פוריה של מספר פונקציות פשוטות.

דוגמא 2.1: תהי $f(x) = x$ בקטע $[-\pi,\pi]$. ברור כי f נמצאת ב־ E. נפתח את הטור פוריה שלה. נציין, שכמו במקרים רבים, נצטרך (ורצוי) לחשב את המקדמים a_0 ו־ a_n

$(n \geq 1)$ בנפרד.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

עבור $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0 \end{aligned}$$

נציין כי את שתי התוצאות הללו יכולנו לקבל מייד מן האי-זוגיות של הפונקציות x ו־ $x\cos nx$ בקטע $[-\pi, \pi]$. לעובדה זו נחזור בסעיף **2.2**. נעבור עכשיו לחישוב המקדמים b_n, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right] = \frac{-2\pi\cos n\pi}{n\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

לכן הטור פוריה של $f(x) = x$ נתון על ידי

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

כבר בדוגמא ראשונה זו רואים שהטור אינו שווה לפונקציה בכל נקודה של הקטע $[-\pi, \pi]$. בקצות הקטע $x = \pm\pi$ הטור מתאפס ואילו הפונקציה עצמה אינה מתאפסת בנקודות אלה. אבל, כפי שנוכיח בהמשך, הטור כן מתכנס ל־ x בכל נקודה פנימית של הקטע.

דוגמא 2.2: הטור פוריה של הפונקציה $f(x) = 5 - 3\sin 2x + 8\cos 3x$ זהה לפונקציה עצמה (ולכן הוא סופי במקרה זה). ניתן לקבל תוצאה זו גם על ידי חישוב. אך החישוב כאן מיותר לחלוטין (מדוע?). באופן כללי, כל פונקציה מן הצורה

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} A_n\cos nx + \sum_{n=1}^{M} B_n\cos nx$$

כאשר M הוא מספר טבעי ו־ $A_M \neq 0$ או $B_M \neq 0$, נקראת **פולינום טריגונומטרי ממעלה** M. לגבי כל פונקציה כזו, הטור פוריה שלה זהה לה. זאת אומרת, המקדמים שלו יהיו:

$$a_n = \begin{cases} A_n, & n \leq M \\ 0, & n > M \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} B_n, & n \leq M \\ 0, & n > M \end{cases}.$$

דוגמא 2.3: תהי $f(x)=|x|$ בקטע $[-\pi,\pi]$. ברור ש־ $f\in E$. נחשב את הטור פוריה של f. נתחיל בחישוב של המקדמים a_n:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=\pi$$

עבור $n\geq 1$:

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right]\\&=\begin{cases}-\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ אי–זוגי}\\ 0, & n \text{ זוגי}\end{cases}\end{aligned}$$

עבור $n\geq 1$ ניתן לבדוק כי $b_n=0$ (ראה גם סעיף **2.2**). לכן הטור פוריה של $f(x)=|x|$ נתון על ידי

$$|x|\sim\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x.$$

אחת מהתכונות הבסיסיות של מערכת אורתונורמלית קשורה לקירוב הטוב ביותר של וקטור נתון על ידי וקטור השייך לתת-מרחב הנפרש על ידי חלק מאיברי המערכת (ראה משפט **1.17**). תרגום פשוט של משפט **1.17** למקרה של טורי פוריה נותן את התוצאה הבאה:

משפט 2.3: **תהי $f\in E$. אזי לכל $m\in\mathbb{N}$, המינימום של הביטוי**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\right]\right|^2\,dx$$

כפונקציה של המשתנים A_n ו־ B_n (ב־ $\mathbb{C}$), מתקבל בנקודות $A_n=a_n$ ו־ $B_n=b_n$, כאשר a_n ו־ b_n הם המקדמי פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

נשתמש בעובדה זו בהמשך.

תרגילים

1. מצא את הטור פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. $f(x)=|\sin x|$.

ב. $$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ e^x, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

ג. $$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\pi< x< 0\\ \sin x, & 0<x<\pi\end{cases}$$

ד. $$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

2. עבור כל ממשי $-\pi\le p\le\pi$, מצא את הטור פוריה של הפונקציה

$$f_p(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le p\\ 1, & p<x\le\pi\end{cases}.$$

3. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. נגדיר $g(x)=f(x+\pi)$, לכל $x\in\mathbb{R}$, ויהי

$$g(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos nx+B_n\sin nx]$$

הטור פוריה של g בקטע $[-\pi,\pi]$. בטא את A_n ו- B_n על ידי a_n ו- b_n.

ב. נגדיר $h(x)=f(x)\cos x$, ויהי

$$h(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx]$$

הטור פוריה של h בקטע $[-\pi,\pi]$. בטא את α_n ו- β_n על ידי a_n ו- b_n.

4. תהי θ זוית נתונה. הוכח כי הקבוצה

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos(x+\theta),\quad \sin(x+\theta),\quad \cos(2x+\theta),\quad \sin(2x+\theta),\quad \ldots\right\}$$

היא מערכת אורתונורמלית במרחב E ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

5. תהי $f \in E$ ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. הוכח כי קיימת סדרה $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ וסדרה $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש־ $-\frac{\pi}{2} < \alpha_n \le \frac{\pi}{2}$ ו־

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - \alpha_n)$$

ובאופן דומה, קיימת סדרה $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ וסדרה $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־ $-\frac{\pi}{2} < \beta_n \le \frac{\pi}{2}$ ו־

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx + \beta_n).$$

2. זוגיות, אי-זוגיות, ודוגמאות נוספות

פיתוח הטור פוריה של פונקציה נתונה הוא פשוט יותר כאשר הפונקציה זוגית או אי-זוגית. נזכור כי פונקציה f נקראת **זוגית סביב לנקודה** $x = a$ אם לכל x (מתאים) מתקיים

$$f(a - x) = f(a + x).$$

נאמר ש־ f **אי-זוגית סביב לנקודה** $x = a$ אם לכל x מתקיים

$$f(a - x) = -f(a + x).$$

במידה ולא נזכיר את הנקודה $x = a$ אז נתכוון למקרה השכיח בו $a = 0$. במקרה זה f היא זוגית אם לכל x, $f(-x) = f(x)$, ו־ f אי-זוגית אם לכל x, $f(-x) = -f(x)$. הדוגמאות הסטנדרטיות לפונקציות זוגיות הן

$$f(x) = x^{2n}, \quad f(x) = \cos nx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

ולפונקציות אי-זוגיות הן

$$f(x) = x^{2n-1}, \quad f(x) = \sin nx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

מכאן מקור השמות "זוגית" ו־ "אי-זוגית". מתכונות הכפל ב־ -1 נובעות התכונות הבאות של פונקציות זוגיות ואי-זוגיות.

א. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

ג. מכפלה של פונקציה אי-זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ד. אם g היא פונקציה אי-זוגית אזי לכל $b>0$,

$$\int_{-b}^{b} g(x)dx = 0\,.$$

ה. אם g היא פונקציה זוגית אזי לכל $b>0$,

$$\int_{-b}^{b} g(x)dx = 2\int_{0}^{b} g(x)dx\,.$$

מן התכונות האלה נקבל את התוצאות הבאות, שמראות שבמקרה של זוגיות או אי-זוגיות חצי ממקדמי הטור מתאפסים.

טענה 2.4: תהי f פונקציה במרחב E.

א. אם f זוגית אזי הטור פוריה של f הוא

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

כאשר

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\,.$$

טור כזה נקרא **טור קוסינוסים**.

ב. אם f היא פונקציה אי-זוגית אזי הטור פוריה של f הוא

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

כאשר

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\,.$$

טור כזה נקרא **טור סינוסים**.

דוגמא 2.4: תהי $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ פונקצית הסימן בקטע $[-\pi,\pi]$. כלומר

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x\le\pi \\ 0, & x=0 \\ -1, & -\pi\le x<0 \end{cases}.$$

ברור כי f היא פונקציה אי-זוגית ולכן $a_n = 0$ לכל n; את המקדמים b_n נצטרך לחשב.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{זוגי } n \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{אי–זוגי } n \end{cases} \end{aligned}$$

מכאן ש־

$$.f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$$

דוגמא 2.5: תהי $f(x) = x^2$ בקטע $[-\pi, \pi]$. ברור כי f היא פונקציה זוגית ולכן $b_n = 0$ לכל n; את המקדמים a_n יש לחשב. נתחיל במקרה בו $n \geq 1$. את החישוב של a_n נבצע על ידי שימוש כפול באינטגרציה לפי חלקים.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} 2x\sin nx\, dx\right] = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx \\ &= -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx\right] \\ &= -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

עכשיו נחשב את a_0.

$$.a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

מכאן ש־

$$.x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

תרגילים

1. מצא את הטור פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x\,|x|$ ב. $f(x) = \pi^2 - x^2$ ג. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$

2. מצא את הטור פוריה של $f_p(x) = \cos px$, עבור $0 \le p \le \pi$.

3. תהי $f \in E$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. נגדיר את שתי הפונקציות

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

מצא את הטור פוריה של g ואת הטור פוריה של h בקטע $[-\pi, \pi]$.

3. טור פוריה מרוכב

עד עתה עסקנו במערכת אורתונורמלית המורכבת מהפונקציות הממשיות $\sin nx$ ו־ $\cos nx$. נציג עכשיו מערכת אורתונורמלית חשובה אשר איבריה הם פונקציות מרוכבות דווקא. המכפלה הפנימית הפעם תהיה קצת שונה

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx .$$

נזכור את נוסחת אוילר אשר לפיה, עבור כל $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x .$$

קל מאוד להוכיח כי קבוצת הפונקציות $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ מהווה מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל. לכן, לכל $f \in E$, הטור המתאים למערכת זו הוא מן הצורה

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{2.4}$$

כאשר

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots . \tag{2.5}$$

הגדרה 2.5: תהי $f \in E$. הטור **(2.4)** נקרא **הטור פוריה המרובב** של f כאשר המקדמים c_n הוגדרו בנוסחה **(2.5)**.

טור זה אינו אלא הטור פוריה הרגיל בצורה קצת שונה. בכדי לראות זאת נשים לב כי

$$e^{i0x} = 1$$
$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

יהיו a_n ו־ b_n כמו בנוסחה **(2.3)**. אזי לכל $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} \end{aligned}$$

ו־

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] \\ &= \frac{a_n + ib_n}{2} \end{aligned}$$

מכך נובע

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

לכן

$$\begin{aligned} f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(\cos nx + i\sin nx) + c_{-n}(\cos nx - i\sin nx)\right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_n + c_{-n})\cos nx + i(c_n - c_{-n})\sin nx\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n\sin nx\right] \end{aligned}$$

יוצא לכן שאין שום הבדל בין הטור פוריה המרוכב של f ובין הטור פוריה הרגיל של f. למרות זאת, הטור פוריה המרוכב הוא לפעמים נוח יותר לשימוש, ולפעמים גם טבעי יותר. הוא

מבליט את העובדה שניתן לראות בכל פונקציה מחזורית 2π כאילו היתה פונקציה המוגדרת על מעגל היחידה במישור המרוכב (והרי המעגל משקף את תופעת המחזוריות בצורה טובה).

דוגמא 2.6: נחשב את הטור פוריה המרוכב של $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$. במהלך החישוב נשתמש באינטגרציה לפי חלקים. לכל $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{xe^{-inx}}{-in}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} - \frac{-\pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{e^{-inx}}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}}{-in}\right] \\ &= \frac{i\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^n i}{n} \end{aligned}$$

עבור $n = 0$,

$$.c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

לכן

$$.x \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n i}{n}e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-1)^n i}{n}e^{inx}$$

נציין כי את התוצאה הזו יכולנו לקבל מן הטור פוריה של $f(x) = x$ (אותו מצאנו בדוגמא **2.1**) ומהשוויונים $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ו־ $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ (שהוכחנו למעלה).

תרגילים

.1 תהי $f \in E$. מצא את הטור פוריה המרוכב של $\mathrm{Re}(f)$ על ידי שימוש בטור פוריה המרוכב של f.

.2 תהי $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ e^{ix}, & 0 \le x < \pi \end{cases}$. מצא את הטור פוריה המרוכב של f.

.3 תהי $f \in E$, ויהי

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi, \pi]$. חשב את הטורי פוריה המרוכבים של $f(\overline{x})$, $\overline{f(x)}$, ו־ $f(-x)$.

4. יהיו $f, g \in E$ ומחזוריות 2π, ויהיו

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \qquad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}$$

הטורי פוריה המרוכבים של f ו־ g בקטע $[-\pi, \pi]$. לכל x ממשי נגדיר

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t)\, dt.$$

א. הוכח כי h רציפה למקוטעין ומחזורית 2π.

ב. יהי $h(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הטור פוריה המרוכב של h בקטע $[-\pi, \pi]$. הוכח כי $c_n = a_n b_n$, לכל $n \in \mathbb{Z}$.

5. מצא את הטור פוריה המרוכב של $f(x) = e^x$.

6. תהי $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. הוכח את הטענות הבאות:

א. אם f מקבלת ערכים ממשיים בלבד אזי $c_{-n} = \overline{c_n}$.

ב. אם f מקבלת ערכים מדומים בלבד אזי $c_{-n} = -\overline{c_n}$.

ג. אם f ממשית וזוגית אזי c_n ממשי.

ד. אם f ממשית ואי-זוגית אזי c_n מדומה.

4. התכנסות נקודתית ומשפט דיריכלה

תכונת הסגירות של המערכת האורתונורמלית הטריגונומטרית (עובדה שעדיין לא הוכחנו) מבטיחה לנו כי הטור פוריה של כל פונקציה f במרחב E מתכנס בנורמה לפונקציה f. כלומר, אם a_n ו־ b_n הם מקדמי הטור פוריה של f אז

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \right) \right\| = 0.$$

נוכל לרשום זאת גם כך

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \right) \right|^2 dx = 0.$$

הנוסחאות האחרונות מאמתות את הרושם כי הסכומים החלקיים של הטור הולכים ומתקרבים לפונקציה f באיזשהו מובן. אך כפי שראינו כבר בדוגמא **2.1**, אין זו בהכרח התכנסות נקודתית.

בסעיף זה נציג תנאים המבטיחים שהטור פוריה של f יתכנס נקודתית ל־ f. כלומר שבכל נקודה x של הקטע $[-\pi,\pi]$ יתקיים השוויון

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx].$$

בכדי להשיג סוג כזה של התכנסות נצטרך להגביל את עצמנו למחלקה יותר מצומצמת של פונקציות. גם כך ההתכנסות הנקודתית לא תמיד תתקיים בכל הנקודות בקטע (אלא רק בנקודות "הטובות" של הקטע).

נגדיר את E' להיות מרחב כל הפונקציות $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ המקיימות את התנאים הבאים:

1. $f\in E$.
2. לכל $x\in[-\pi,\pi)$, הגבול הבא קיים וסופי:
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x+)}{h}.$$
3. לכל $x\in(-\pi,\pi]$, הגבול הבא קיים וסופי:
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x-)-f(x-h)}{h}.$$

הביטויים $f(x-)$ ו־ $f(x+)$ מציינים את הגבול השמאלי והגבול הימני של f בנקודה x, בהתאמה. התנאים האחרונים שקולים לקיום הנגזרות החד-צדדיות המתואמות של f בכל נקודה בקטע $[-\pi,\pi]$.

משפט 2.6: (משפט דיריכלה, Dirichlet) **תהי $f\in E'$. אזי לכל $x\in(-\pi,\pi)$, הטור פוריה של f מתכנס לערך**

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

בקצות הקטע $x=\pm\pi$ הטור מתכנס לערך

$$\frac{f(\pi-)+f((-\pi)+)}{2}.$$

הערות:

א. קצות הקטע $x=\pm\pi$ אינם באמת מקרה מיוחד. אם, כפי שהזכרנו קודם, נניח כי f מוגדרת על כל $\mathbb{R}$ כך שהיא מחזורית 2π, אז מן המחזוריות ברור כי $f(\pi+)=f((-\pi)+)$, ולכן

$$\frac{f(\pi-)+f(\pi+)}{2}=\frac{f(\pi-)+f((-\pi)+)}{2}.$$

הערה זהה חלה גם על הקצה השני $x=-\pi$.

ב. אם f רציפה בנקודה x אזי $f(x+) = f(x-)$, ולכן $f(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$. הטור פוריה של f יתכנס לערך $f(x)$ בנקודה זו. מכאן שאם, בנוסף לתנאי המשפט, f רציפה בכל הקטע $[-\pi, \pi]$ ומקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$, אז הטור פוריה של f יתכנס בכל נקודה x בקטע $[-\pi, \pi]$ ל- $f(x)$.

הוכחת משפט דיריכלה היא ארוכה ומורכבת. לכן נוכיח קודם כל מספר טענות עזר אשר יסייעו לנו להציג אותה בצורה נוחה יותר. חלק מן הטענות האלה הן חשובות בפני עצמן, ובהמשך נשתמש בהן גם למטרות אחרות. אנו נניח כי f מוגדרת על כל $\mathbb{R}$, והיא מחזורית 2π. לכל m טבעי נסמן את הסכום החלקי של הטור פוריה של f על ידי

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}[a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

טענה 2.7: $$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos nt\right] dt.$$

הוכחה: על פי ההגדרה של המקדמים a_n ו- b_n נקבל

$$\begin{aligned}
S_m(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}[a_n \cos nx + b_n \sin nx] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)ds + \sum_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos ns\, ds \cdot \cos nx\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin ns\, ds \cdot \sin nx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}[\cos ns \cos nx + \sin ns \sin nx]\right] ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos n(s-x)\right] ds
\end{aligned}$$

נציב $t = s - x$ ונקבל

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos nt\right] dt.$$

לכל פונקציה מחזורית 2π, ולכל a ממשי, מתקיים השוויון

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt$$

(נשאיר זאת לבדיקת הקורא). לכן

$$.S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right]dt$$

■

טענה 2.8: לכל מספר טבעי m מתקיים

$$.\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos mt = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

הוכחה: נשתמש בזהות הטריגונומטרית

$$.\cos\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

ממנה נובע מייד כי לכל טבעי k, ולכל ממשי t,

$$.\cos kt\sin\tfrac{1}{2}t = \tfrac{1}{2}[\sin(k+\tfrac{1}{2})t-\sin(k-\tfrac{1}{2})t]$$

לכן

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}t[\tfrac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos mt] &= \tfrac{1}{2}\Big[\sin\tfrac{1}{2}t+\big(\sin\tfrac{3}{2}t-\sin\tfrac{1}{2}t\big)\\ &\quad+\big(\sin\tfrac{5}{2}t-\sin\tfrac{3}{2}t\big)+\cdots+\big(\sin(m+\tfrac{1}{2})t-\sin(m-\tfrac{1}{2})t\big)\Big]\\ &= \tfrac{1}{2}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\end{aligned}$$

נחלק את שני האגפים ב־ $\sin\frac{1}{2}t$ ונקבל את התוצאה הדרושה. ■

הפונקציה $D_m(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt$ נקראת **גרעין דיריכלה** (Dirichlet kernel). בטענה **2.8** ראינו שלמעשה $D_m(t)=\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$. הנקודות $t=2n\pi$, בהן המכנה מתאפס, הן נקודות אי-רציפות סליקות.

טענה 2.9: $.\int_0^{\pi} D_m(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$

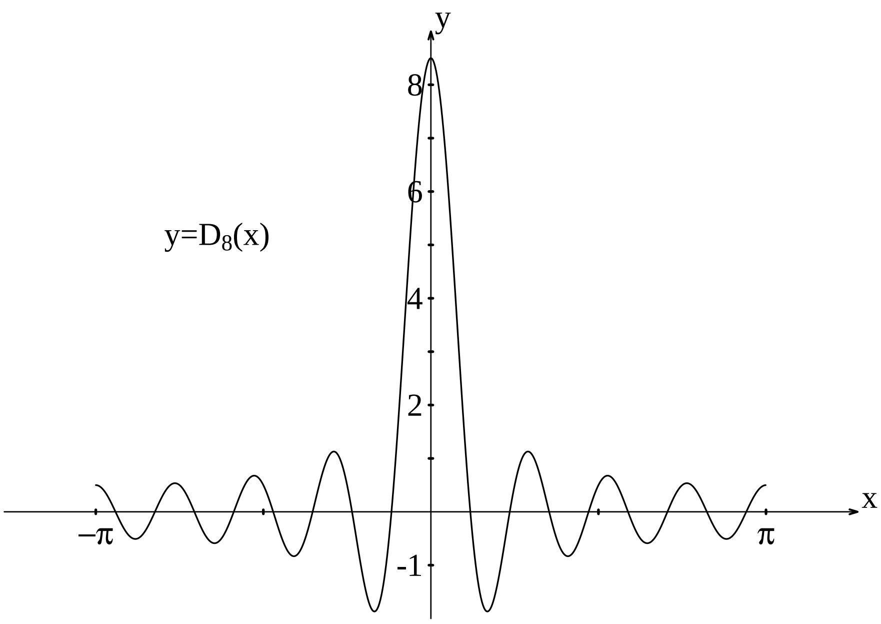
הוכחה:

$$.\int_0^{\pi} D_m(t)\,dt = \int_0^{\pi}[\tfrac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos mt]\,dt$$

ברור כי לכל n טבעי $\int_0^{\pi}\cos nt\,dt=0$, ולכן נקבל

$$.\int_0^{\pi} D_m(t)\,dt = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

■



ציור 2.1

הטענה הבאה היא מקרה פרטי של אי-השוויון של בסל אותו הוכחנו באופן כללי במשפט **1.19**.

טענה 2.10: (אי-שוויון בסל, Bessel) תהי $f \in E$ ויהיו a_n ו־ b_n המקדמים של הטור פוריה של f. אזי

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \le \|f\|^2 .$$

הוכחה: לשם הוכחת אי-שוויון זה נסביר מדוע הוא מקרה פרטי של אי-שוויון בסל מסעיף **1.5**. הצורה הכללית של אי-שוויון בסל היא

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \le \|f\|^2$$

כאשר $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית. במקרה שלנו עבור $f \in E$,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx .$$

עבור $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\langle f, e_n \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx \right|^2 = \left| \frac{a_0}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} .$$

אם $e_n(x) = \cos nx$, $n \geq 1$, אז:

$$|\langle f, e_n \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right|^2 = |a_n|^2$$

ובאותו אופן, אם $e_n(x) = \sin nx$ אז $|\langle f, e_n \rangle| = |b_n|$. לכן הנוסחה שרשמנו בטענה **2.10** היא אכן אי-שוויון בסל. ∎

הטענה הבאה היא מקרה פרטי של הלמה של רימן-לבג (ראה משפט **1.20**) שנובעת בקלות מאי-שוויון בסל.

טענה 2.11: (הלמה של רימן-לבג, Riemann-Lebesgue) **תהי** $E \ni f$ **ויהיו** a_n **ו-** b_n **המקדמים של הטור פוריה של** f. **אזי**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

כלומר:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 .$$

טענה 2.12: **לכל פונקציה** g **הרציפה למקוטעין בקטע** $[0, \pi]$ **מתקיים**

$$\lim_{m\to\infty} \int_{0}^{\pi} g(t) \sin(m + \tfrac{1}{2})t \, dt = 0 .$$

הוכחה: נגדיר שתי פונקציות

$$h_1(t) = \begin{cases} g(t) \cos \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} g(t) \sin \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq t < 0 \end{cases} .$$

מן הנתון ש- g רציפה למקוטעין בקטע $[0, \pi]$ נובע שגם h_1 ו- h_2 רציפות למקוטעין ב- $[-\pi, \pi]$.
קל לראות ש-

$$\int_{0}^{\pi} g(t) \sin(m + \tfrac{1}{2})t \, dt = \int_{0}^{\pi} g(t) \cos \tfrac{t}{2} \sin mt \, dt + \int_{0}^{\pi} g(t) \sin \tfrac{t}{2} \cos mt \, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} h_1(t) \sin mt \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} h_2(t) \cos mt \, dt$$

על פי טענה **2.11** (הלמה של רימן-לבג), כל אחד מן האינטגרלים שבאגף ימין שואף לאפס, ומכאן נובעת התוצאה הדרושה. ∎

הוכחת משפט 2.6: עלינו להוכיח שלכל x מתקיים

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

נבחר x כלשהו ונתייחס אליו כקבוע לאורך כל ההוכחה. נגדיר את הפונקציה

$$g(t) = \frac{f(x+t)-f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

ברור כי g רציפה למקוטעין בקטע $(0,\pi]$, ובנוסף לכך

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} g(t) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}\\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\right]\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

הגבול האחרון קיים וסופי משום ש-

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}} = 1$$

והגבול

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x+)}{t}$$

קיים על סמך הגדרת E'. על פי הנחת המשפט, הגבול קיים וסופי. לכן g רציפה למקוטעין בכל הקטע $[0,\pi]$. על סמך טענה **2.12**

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt = 0.$$

מהגדרת g נקבל

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt\right] = 0.$$

על פי טענה **2.9**

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt &= f(x+)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\\ &= f(x+)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_m(t)\,dt\\ &= \frac{f(x+)}{2}\end{aligned}$$

לכן

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt=\frac{f(x+)}{2}.$$

משיקולים דומים ניתן לקבל גם את השוויון

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(m+\tfrac{1}{2})t\,dt=\frac{f(x-)}{2}.$$

לכן מטענות **2.7** ו־**2.8** נקבל

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}S_m(x)&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_m(t)\,dt\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)D_m(t)\,dt+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)D_m(t)\,dt\\&=\frac{f(x-)+f(x+)}{2}\end{aligned}$$

■

בשלב זה ידוע לנו שאם פונקציה מקיימת את תנאי משפט דיריכלה אז הטור פוריה שלה מתכנס בכל נקודה של $\mathbb{R}$, דבר שלא ידענו קודם לכן. בנוסף לכך, הטור יתכנס לערך של הפונקציה באותה נקודה, אם הפונקציה רציפה בה. בנקודה בה הפונקציה אינה רציפה, הטור מתכנס לערך הטבעי ביותר שניתן לצפות – לממוצע של הגבולות החד-צדדיים בנקודה.

דוגמא 2.7: תהי $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$. בדוגמא **2.1** פתחנו את הטור פוריה של f ומצאנו כי

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

על פי משפט דיריכלה, הטור מתכנס ל־ x בקטע הפתוח $(-\pi,\pi)$, ומתכנס לאפס בקצות הקטע. אם, למשל, נציב בטור את הערך $x=\frac{\pi}{2}$ נקבל

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin n\tfrac{\pi}{2}\\&=2\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}-\frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}-\frac{\sin\frac{4\pi}{2}}{4}+\cdots\right]\\&=2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right]\end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

על ידי חישובים דומים, אם נציב בטור את הערך $x=\frac{\pi}{4}$ נקבל

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots.$$

אותה נוסחה ניתן לקבל מן הטור פוריה של $\operatorname{sgn}(x)$ (ראה דוגמא **2.4**) על ידי הצבת $x=\frac{\pi}{2}$.

דוגמא 2.8: בדוגמא **2.5** מצאנו את הטור פוריה של $f(x)=x^2$:

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

ברור כי $f(x)=x^2$ מקיימת את תנאי משפט דיריכלה בקטע $[-\pi,\pi]$. יתרה מזאת, ההמשכה המחזורית 2π של f רציפה בכל נקודה של $\mathbb{R}$, ולכן נוכל לרשום למעשה:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx. \tag{2.6}$$

אם נציב $x=0$ בנוסחה האחרונה נקבל

$$0=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{2.7}$$

אם נציב $x=\pi$ בנוסחה (**2.6**) אז נקבל את הזהות

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

נציין כי את השוויון האחרון אפשר לקבל משוויון (**2.7**) (או להיפך) באופן הבא

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}S.$$

קיבלנו $S=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}S$, ולכן $S=\frac{\pi^2}{6}$.

תרגילים

1. תהי $f(x)=1-x^2$ בקטע $[-\pi,\pi]$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע זה.

א. חשב את a_n ו־ b_n.

ב. לאיזה ערכים מתכנס הטור פוריה של f בנקודות $x = 5\pi$ ו־ $x = 6\pi$? נמק.

2. לכל מספר ממשי $p \neq 0$, תהי $f_p(x) = e^{px}$ בקטע $[-\pi, \pi]$, ויהי

$$f_p(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f_p בקטע זה.

א. חשב את a_n ו־ b_n.

ב. חשב את $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ואת $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

3. תהי f פונקציה המקיימת את תנאי משפט דיריכלה בקטע $[-\pi, \pi]$. חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(n-\frac{1}{2})t\, dt$

ג. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{t}\sin(n-\frac{1}{2})t\, dt$

4. מצא את הטור פוריה בקטע $[-\pi, \pi]$ של $f(x) = \begin{cases} x - [x], & \text{לא שלם } x \\ \frac{1}{2}, & \text{שלם } x \end{cases}$. מצא לאיזה ערך מתכנס הטור בנקודות $x = 5$, $x = 3$, ו־ $x = 1.5$.

5. לכל מספר טבעי m, תהי $D_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos nt$.

א. חשב את $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)\sin 100t\, dt$.

ב. חשב את $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[D_m(t)]^2\, dt$, עבור $m = 100$.

ג. נגדיר את הפונקציה $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{1}{2}t}{t}, & t \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases}$.

חשב את $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)g(t)\, dt$.

6. תהי $f(x) = xe^{ix}$. מצא את הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi, \pi]$ וחשב את $F(\pi)$, $F(-\pi)$, ו־ $F(\frac{\pi}{4})$. כאשר

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

הוא הטור פוריה המרוכב של f.

7. תהי

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2x}{\pi}, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

א. חשב את המקדמים a_n ו־ b_n של הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. נגדיר את הפונקציה

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx], \qquad -\infty < x < \infty.$$

בדוק את התכנסות הטור לכל ערך של x ושרטט סקיצה של הגרף של g בקטע $[-3\pi, 3\pi]$.

5. התכנסות במידה שווה

תהי $f \in E'$ ויהיו $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו־ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקדמי הטור פוריה של f. על פי משפט דיריכלה, לכל x מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]\right] = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

זוהי התכנסות נקודתית. בסעיף הנוכחי, נתעניין בתנאים על f אשר תחתיהם הטור פוריה של f יתכנס במידה שווה לפונקציה f. אך ראשית כל נזכיר את ההגדרות הפורמליות בכדי להבין את ההבדלים בין שני סוגי ההתכנסות האלה.

הגדרה 2.13: (התכנסות נקודתית, pointwise convergence) **תהי $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בקטע $[a, b]$, ותהי f פונקציה שגם היא מוגדרת בקטע $[a, b]$. נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה f בקטע $[a, b]$, אם לכל $x \in [a, b]$ מתקיים $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$. כלומר, לכל $x \in [a, b]$, ולכל $\epsilon > 0$ קיים מספר טבעי $N(\epsilon, x)$ כך ש־**

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$$

עבור כל $m \geq N(\epsilon, x)$.

הגדרה 2.14: (התכנסות במידה שווה, uniform convergence) **תהי $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בקטע $[a, b]$, ותהי f פונקציה שגם היא מוגדרת בקטע $[a, b]$. נאמר**

שסדרת הפונקציות $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה f בקטע $[a,b]$, אם לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר טבעי $N(\epsilon)$ כך ש-

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$$

עבור כל $m \geq N(\epsilon)$, ועבור כל $x \in [a,b]$.

שתי ההגדרות נראות דומות למדי, אך למרות זאת יש הבדל בין שני המושגים. מושג ההתכנסות במידה שווה הוא הרבה יותר חזק. אם סדרת פונקציות מתכנסת במידה שווה אז היא מתכנסת גם נקודתית לאותה הפונקציה. ההיפך אינו נכון, בדרך כלל. שני המושגים מתארים שני מצבים שונים בהם סדרת הפונקציות $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ הולכת ומתקרבת לפונקציה f. במקרה של ההתכנסות הנקודתית, מתבוננים על כל נקודה x של הקטע $[a,b]$ בנפרד ודורשים שלכל $\epsilon > 0$ יהיה קיים $N(\epsilon, x)$, התלוי גם ב- x; יתכן בהחלט שאותו $N(\epsilon, x)$ לא יתאים עבור נקודה אחרת x' בקטע. במקרה של התכנסות במידה שווה, לעומת זאת, נקודת המבט היא גלובלית. לכל $\epsilon > 0$, קיימת דרישה למספר $N(\epsilon)$ אשר יתאים לכל x בקטע; נסתכל על דוגמא פשוטה: נניח ש- $f_m(x) = x^m$ בקטע $[0,1]$. קל לראות כי הסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציה

$$.f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

אך, לעומת זאת, הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה ל- f בקטע $[0,1]$. סיבה אחת לכך היא שלכל m קיים x_m כך ש- $f_m(x_m) = \frac{1}{2}$. לכן אם נקח, למשל, $\epsilon = \frac{1}{4}$, הרי שלא קיים שום N העונה לדרישת ההגדרה. באופן כללי: אם סדרת פונקציות רציפות מתכנסת נקודתית לפונקציה לא רציפה, אז ההתכנסות אינה במידה שווה (מדוע?).

נחזור לפונקציה f שבתחילת הסעיף. נתבונן בסכומים החלקיים של הטור פוריה שלה:

$$.S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

זהו סכום סופי של פונקציות רציפות, ולכן S_m היא פונקציה רציפה עבור כל m. בנוסף לכך מתקיים $S_m(-\pi) = S_m(\pi)$, לכל m. לכן תנאי הכרחי לכך שהסדרה $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ תתכנס במידה שווה לפונקציה f על כל הקטע $[-\pi, \pi]$ הוא שהפונקציה f תהיה רציפה בכל הקטע, ובנוסף לכך תקיים $f(-\pi) = f(\pi)$. כל זה מוביל אותנו למשפט הבא.

משפט 2.15: **אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, ו- $f' \in E$, אזי הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה ל- f על כל הקטע.**

הערה: שים לב כי התנאי $f' \in E$ גורר כי $f \in E'$.

הוכחה: מאחר ו־ $f' \in E$ הרי שיש ל־ f' טור פוריה

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$$

וכמובן ל־ f עצמה קיים טור פוריה

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

נבטא את המקדמים α_n ו־ β_n באמצעות המקדמים a_n ו־ b_n. במהלך החישובים, נשתמש בעובדה ש־ f רציפה ו־ $f(-\pi) = f(\pi)$.

א.

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2} = 0.$$

ב. עבור $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \sin nx\, dx\right] \\
&= \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \\
&= nb_n
\end{aligned}$$

ג.

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, n\cos nx\, dx\right] \\
&= -na_n
\end{aligned}$$

לכן נוכל לרשום

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx.$$

המשימה הבאה שלנו תהיה להוכיח שטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}$ מתכנס (זה אינו הטור המופיע באי-שוויון בסל).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2+\left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2}$$

מאי-שוויון קושי-שוורץ (ראה דוגמא **1.10**) נובע כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2}\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2}$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2}\,.$$

ידוע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ומאי-שוויון בסל (טענה **2.10**) נובע כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2\leq\|f'\|^2<\infty\,.$$

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}$ מתכנס. מעובדה זו, וממבחן ההשוואה להתכנסות טורים, נובע מייד כי כל אחד מן הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ו- $\sum_{n=1}|b_n|$ מתכנס כי

$$|a_n|,\ |b_n|\leq\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}\,.$$

משתי העובדות האחרונות, וממבחן M של ויארשטראס להתכנסות במידה שווה של טורי פונקציות, נובע כי כל אחד מטורי הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$, מאחר ולכל n,

$$|a_n\cos nx|\leq|a_n|,\qquad|b_n\sin nx|\leq|b_n|\,.$$

לכן גם הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$. מאחר ו- $f'\in E$, הרי ש- f מקיימת את תנאי משפט דיריכלה, ולכן הטור פוריה של f מתכנס נקודתית ל- f בכל נקודה ב- $[-\pi,\pi]$. אזי הוא מתכנס ל- f במידה שווה על כל הקטע. ∎

נעבור עתה לשאלת ההתכנסות במידה שווה של טור פוריה בתתי-קטעים $[a,b]$ של $[-\pi,\pi]$, גם במקרה בו ל- f יש נקודות קפיצה. ברור שאם תת-קטע $[a,b]$ מכיל נקודת קפיצה של f אז הטור פוריה של f אינו מתכנס ל- f במידה שווה מקטע $[a,b]$. אנו נוכיח שאם $f'\in E$, ואם

התת-קטע $[a,b]$ אינו מכיל אף נקודת אי-רציפות של f, אזי הטור פוריה של f מתכנס ל- f במידה שווה בקטע $[a,b]$. נתחיל בדוגמא פרטית חשובה אשר ממנה תנבע התוצאה הכללית. תהי $\phi(x)=x$, לכל $-\pi<x<\pi$, ו- $\phi(-\pi)=\phi(\pi)=0$. נניח כי ϕ מוגדרת על כל $\mathbb{R}$ באופן מחזורי 2π. מדוגמא **2.1** וממשפט דיריכלה (משפט **2.6**) נובע שלכל x ממשי מתקיים השוויון

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

כלומר, הטור פוריה מתכנס נקודתית ל- ϕ על כל הקטע $[-\pi,\pi]$. אבל ההתכנסות אינה במידה שווה מאחר ו- ϕ אינה רציפה בנקודות $x=\pm\pi$. בטענה הבאה נוכיח שהטור פוריה של ϕ מתכנס במידה שווה בכל תת-קטע סגור אשר אינו כולל בתוכו את הנקודות π או $-\pi$.

טענה 2.16: **לכל $0<b<\pi$, הטור פוריה של ϕ מתכנס ל- ϕ במידה שווה בקטע $[-b,b]$.**

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי להתכנסות במידה שווה של טור פונקציות. נסמן כרגיל

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

יהי $\epsilon>0$. עלינו להוכיח שקיים $N(\epsilon)$ טבעי כך ש- $|S_m(x)-S_k(x)|<\epsilon$, לכל $m,k\geq N(\epsilon)$, ולכל x בקטע $[-b,b]$. למטרה זו נתבונן בפונקציה $\cos\frac{x}{2}$ בקטע $[-b,b]$. פונקציה זו מקבלת ערך מינימלי $\cos\frac{b}{2}>0$ (שמתקבל בשתי קצות הקטע). יהיו m ו- k שני מספרים טבעיים כך ש- $k<m$. לכן

$$|S_m(x)-S_k(x)|=2\left|\frac{\sin(k+1)x}{k+1}-\frac{\sin(k+2)x}{k+2}+\cdots\pm\frac{\sin mx}{m}\right|.$$

נכפול את אגף ימין ב- $\cos\frac{x}{2}$ ונשתמש בזהות

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

$$\begin{aligned}2\cos\frac{x}{2}\left[\frac{\sin(k+1)x}{k+1}-\frac{\sin(k+2)x}{k+2}+\cdots\pm\frac{\sin mx}{m}\right]&=\\=\left[\frac{\sin(k+\frac{3}{2})x}{k+1}+\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{k+1}\right]-\left[\frac{\sin(k+\frac{5}{2})x}{k+2}+\frac{\sin(k+\frac{3}{2})x}{k+2}\right]\\+\cdots\pm\left[\frac{\sin(m+\frac{1}{2})x}{m}+\frac{\sin(m-\frac{1}{2})x}{m}\right]\end{aligned}$$

נסמן $c=\cos\frac{b}{2}$. מאחר ו- $\cos\frac{x}{2}\geq c$, לכל x בקטע $[-b,b]$, ומאחר ו- $|\sin\alpha|\leq 1$, לכל α ממשי, נקבל על ידי חישוב קל שלכל x בקטע $[-b,b]$ יתקיים

$$|S_m(x)-S_k(x)|\leq\frac{1}{c}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}+\frac{1}{m}\right].$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ הוא טור מתכנס ולכן קיים מספר טבעי $N(\epsilon)$ כך שלכל $k \geq N(\epsilon)$,

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} < \frac{c\epsilon}{2}.$$

בנוסף לכך נוכל להניח שלכל $r \geq N(\epsilon)$, $\frac{1}{r} < \frac{c\epsilon}{4}$. לכן, עבור כל $m > k \geq N(\epsilon)$, ועבור כל x בקטע $[-b, b]$,

$$|S_m(x) - S_k(x)| \leq \frac{1}{c}\left[\frac{1}{k+1} + \sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{m}\right] < \frac{1}{c}\left[\frac{c\epsilon}{4} + \frac{c\epsilon}{2} + \frac{c\epsilon}{4}\right] = \epsilon.$$

אזי סדרת הפונקציות $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ מקיימת את הקריטריון של קושי להתכנסות במידה שווה של סדרת פונקציות, ולכן היא מתכנסת במידה שווה לפונקציה $\phi(x) = x$ בקטע $[-b, b]$. ∎

עתה נוכל להוכיח את התוצאה העקרית.

משפט 2.17: **תהי f פונקציה כך ש־ $f, f' \in E$ ויהיו**

$$-\pi < d_1 < d_2 < \cdots < d_n \leq \pi$$

כל נקודות הקפיצה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. אם $[a, b]$ הוא תת-קטע של $[-\pi, \pi]$ אשר אינו מכיל אף אחת מן הנקודות d_k, אזי הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה ל־ f בקטע זה.

הוכחה: לכל $1 \leq k \leq n$, נסמן $z_k = f(d_k+) - f(d_k-)$, ונגדיר את הפונקציה

$$g(x) = f(x) + \frac{z_1}{2\pi}\phi(x+\pi-d_1) + \frac{z_2}{2\pi}\phi(x+\pi-d_2) + \cdots + \frac{z_n}{2\pi}\phi(x+\pi-d_n).$$

כאשר ϕ הוגדרה בטענה **2.16** בקטע $[-\pi, \pi]$ והיא מחזורית 2π. קל לבדוק ש־ g רציפה בכל הקטע $[-\pi, \pi]$, פרט לנקודות d_k, $1 \leq k \leq n$, שהן נקודות אי-רציפות סליקות של g. לכן נוכל להניח ש־ g רציפה בכל הקטע $[-\pi, \pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$, ו־ $g' \in E$. לכן על פי משפט **2.15**, הטור פוריה של g מתכנס במידה שווה על כל הקטע $[-\pi, \pi]$. מטענה **2.16** נובע כי הטור פוריה של ϕ מתכנס במידה שווה ל־ ϕ בכל תת-קטע סגור של $[-\pi, \pi]$ שאינו כולל את הנקודות $x = \pm\pi$. לכן הטור פוריה של $\phi(x+\pi-d_k)$ (אשר מתקבל על ידי הזזה פשוטה של הטור פוריה של ϕ) יתכנס במידה שווה בכל תת-קטע סגור של $[-\pi, \pi]$ אשר אינו כולל את הנקודה $x = d_k$. עובדה זו כמובן נכונה גם לפונקציה $\frac{z_k}{2\pi}\phi(x+\pi-d_k)$. נתון לנו שהקטע $[a, b]$ אינו מכיל אף אחת מן הנקודות $x = d_k$, $1 \leq k \leq n$, ולכן הטור פוריה של כל אחת מן הפונקציות $\frac{z_k}{2\pi}\phi(x+\pi-d_k)$ מתכנסת בו במידה שווה. עכשיו

$$f(x) = g(x) - \left[\frac{z_1}{2\pi}\phi(x+\pi-d_1) + \cdots + \frac{z_n}{2\pi}\phi(x+\pi-d_n)\right]$$

ולכן הטור פוריה של f (שמתקבל על ידי החסרת סכום הטורי פוריה של הפונקציות $\frac{z_k}{2\pi}\phi(x+\pi-d_k)$ מן הטור פוריה של g) מתכנס במידה שווה ל־ f בקטע $[a,b]$. ∎

תרגילים

1. תהי $f(x)=\begin{cases} Ax+B, & -\pi\le x<0 \\ \cos x, & 0\le x\le\pi \end{cases}$. עבור אילו ערכים של A ו־ B יתכנס הטור פוריה של f במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

2. תהי $g(x)=\begin{cases} \cos x, & -\pi<x<0 \\ \sin x, & 0<x<\pi \end{cases}$.

א. חשב את הטור פוריה של g בקטע $[-\pi,\pi]$.

ב. נגדיר את הפונקציה

$$h(x)=\int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt+a\sin\frac{x}{2},\qquad -\pi\le x\le\pi.$$

עבור איזה ערכים של a הטור פוריה של h יתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

3. הוכח כי לכל $-\pi\le x\le\pi$, ולכל $a\notin\mathbb{Z}$,

$$\cos ax=\frac{\sin\pi a}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a\sin\pi a}{\pi(a^2-n^2)}\cos nx$$

על סמך זאת הוכח כי

$$\cot\pi a=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2-a^2}\right]$$

4. תהי $f\in E$ ויהי

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. הראה שאם קיימים קבועים c ו־ d כך שלכל n

$$|a_n|\le\frac{c}{n^2},\qquad |b_n|\le\frac{d}{n^2}$$

אזי f רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, והטור פוריה של f מתכנס ל־ f במידה שווה.

6. שוויון פרסבל

בסעיף זה נוכיח שהמרחב הליניארי E סגור ביחס לטור פוריה ולנורמה הרגילה עליו. עובדה זו שקולה (ראה טענה **1.24**) לשוויון פרסבל עבור כל $f \in E$. ננסח את המשפט במונחים של שוויון פרסבל.

משפט 2.18: (שוויון פרסבל, Parseval's identity) **לכל** $f \in E$ **מתקיים השוויון**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2 \tag{2.8}$$

כאשר ה־ a_n **וה־** b_n **הם המקדמי פוריה של** f.

בדיון שבהוכחת טענה **2.10** (אי-שוויון בסל) ראינו מדוע הנוסחה **(2.8)** היא התרגום של שוויון פרסבל (טענה **1.24**) למקרה המיוחד של טורי פוריה. כפי שראינו בהוכחת טענה **1.24**, שוויון פרסבל שקול לתכונת הסגירות. כלומר, בכדי להוכיח את משפט **2.18** יהיה מספיק להוכיח שלכל $f \in E$ מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_m(x)|^2dx = 0\,. \tag{2.9}$$

נעשה זאת בשני שלבים. בשלב הראשון נוכיח ששוויון **(2.9)** מתקיים לכל פונקציה f שמקיימת את תנאי משפט **2.15**. בשלב השני נוכיח שאפשר להתקרב לכל $f \in E$ על ידי פונקציות המקיימות את תנאי משפט **2.15**, ולבסוף נקבל את שוויון פרסבל.

טענה 2.19: **אם** f **רציפה בקטע** $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, **ו־** $f' \in E$, **אזי**

$$\lim_{m\to\infty}\|f - S_m\| = 0\,.$$

הוכחה: ממשפט **2.15**, הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה ל־ f על $[-\pi,\pi]$. לכן, לכל $\epsilon > 0$ נתון, קיים $N(\epsilon)$ כך שלכל $x \in [-\pi,\pi]$ ועבור כל $m \geq N(\epsilon)$

$$|f(x) - S_m(x)| < \epsilon\,.$$

לכן עבור כל $m \geq N(\epsilon)$

$$\|f - S_m\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_m(x)|^2dx \leq 2\epsilon^2\,.$$

כלומר $\lim_{m\to\infty}\|f - S_m\|^2 = 0$. ■

טענה 2.20: תהי $f \in E$, ויהי $\epsilon > 0$. קיימת פונקציה g רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ כך ש־ $g(-\pi) = g(\pi)$, $g' \in E$, ו־ $\|f - g\| < \epsilon$.

הוכחה: אם נתבונן בהגדרת האינטגרל של רימן, נמצא שעבור $f \in E$ ו־ $\epsilon > 0$ קיימות $n+1$ נקודות (n תלוי ב־ ϵ)

$$-\pi = d_0 < d_1 < \cdots < d_n = \pi$$

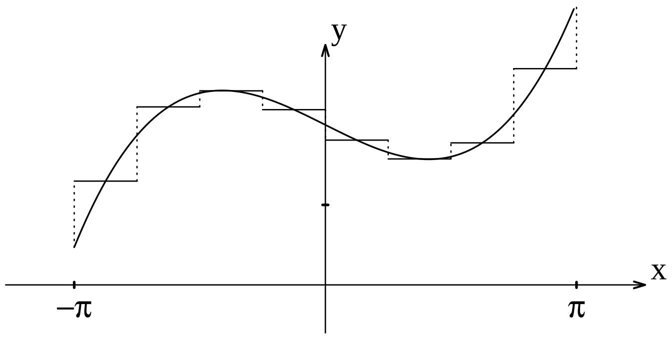
וקיימים n ערכים c_k, $1 \leq k \leq n$, כך שפונקצית המדרגות

$$h(x) = c_k, \qquad d_{k-1} < x \leq d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

מקיימת

$$\|f - h\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

המחשה ויזואלית של מצב זה נתונה בציור **2.2**.



ציור 2.2

בנוסף לכך, אם $|f(x)| \leq M$ לכל x, אזי ניתן לבחור את הערכים c_k, $1 \leq k \leq n$, כך ש־ $|h(x)| \leq M$ לכל x. הרעיון עכשיו הוא לשנות קצת את h כך שתקיים את תנאי הטענה. למטרה זו נבחר $\delta > 0$ המקיים $2\delta < d_k - d_{k-1}$, $1 \leq k \leq n$, ו־ $0 < \delta < \frac{\epsilon^2 \pi}{32 n M^2}$.
נגדיר פונקציה g על ידי

$$g(x) = \begin{cases} c_k, \quad d_{k-1} + \delta \leq x \leq d_k - \delta, \quad k = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{c_{k+1} - c_k}{2\delta}(x - d_k) + \frac{c_{k+1} + c_k}{2}, \; d_k - \delta < x < d_k + \delta, \; k = 1, \ldots, n-1 \\ \frac{c_1 - c_n}{2\delta}(x - \pi) + \frac{c_1 + c_n}{2}, \quad \pi - \delta < x < \pi + \delta \end{cases}$$

וכך ש־ g מחזורית 2π. קל לבדוק ש־ g רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $g(-\pi)=g(\pi)$, ו־ $g' \in E$.
בנוסף

$$\begin{aligned}
\|h-g\|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)-g(x)|^2dx \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_{d_k-\delta}^{d_k+\delta}|h(x)-g(x)|^2dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+\delta}|h(x)-g(x)|^2dx \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}|h(x)-g(x)|^2dx \\
&= \frac{4M^2}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\int_{d_k-\delta}^{d_k+\delta}dx + \int_{-\pi}^{-\pi+\delta}dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi}dx\right] \\
&= \frac{8nM^2\delta}{\pi} \\
&< \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

לכן

$$\|f-g\| \le \|f-h\| + \|h-g\| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$ ∎

הוכחת משפט 2.18: יהיו $f \in E$ ו־ $0 < \epsilon$. על פי טענה **2.20** קיימת פונקציה g המקיימת את תנאי טענה **2.20** כך ש־

$$\|f-g\| < \epsilon.$$

גם כן, קיים $N(\epsilon)$ כך שלכל $m \ge N(\epsilon)$,

$$\|g-T_m\| < \epsilon$$

כאשר T_m הוא הסכום החלקי של הטור פוריה של g. לכן עבור כל $m \ge N(\epsilon)$ מתקיים:

$$\|f-T_m\| \le \|f-g\| + \|g-T_m\| < 2\epsilon.$$

על פי משפט **2.3**

$$\|f-S_m\| \le \|f-T_m\|.$$

אזי לכל $m \ge N(\epsilon)$, $\|f-S_m\| < 2\epsilon$, ולכן $\lim_{n\to\infty}\|f-S_m\| = 0$. ∎

דוגמא 2.9: בדוגמא **2.5** מצאנו את הטור פוריה של $f(x) = x^2$:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

לכן על פי שוויון פרסבל

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}.$$

קל למצוא ש־ $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5}$, ועל ידי חישוב פשוט נוסף נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

קבלנו לכן חישוב של סכום טור מספרי, אשר חישובו על ידי הכלים האלמנטריים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי קשה יותר. נוכל לחשב עוד מספר טורים מספריים דומים על ידי שימוש בתוצאה זו. נחשב לדוגמא את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$
$$= \frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{540}$$

מסקנה מיידית משתי הטענות והמשפט של סעיף זה היא שגם המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב־ E. לא קשה לראות כי שוויון פרסבל המתאים למערכת זו הוא:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

כאשר $f \in E$ ו־ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הוא הטור פוריה המרוכב של f.

דוגמא 2.10: נתבונן בטור פוריה המרוכב של $f(x) = e^x$. לא קשה למצוא כי

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-in)x}}{1-in} \bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-in)}$$

ולכן

$$e^x \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-in)} e^{inx}.$$

קל לראות כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}$. לכן על סמך שוויון פרסבל לטור פוריה מרוכב נקבל

$$\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}{4\pi^2|1-in|^2} = \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

ולכן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{e^{\pi}-e^{-\pi}}.$$

ננסח עכשיו תכונה נוספת של טור פוריה שהיא הכללה של שוויון פרסבל.

טענה 2.21: (שוויון פרסבל מוכלל) **לכל** $f,g\in E$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{a_0\overline{c_0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overline{c_n}+b_n\overline{d_n}$$

כאשר

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

ו-

$$g(x)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[c_n\cos nx+d_n\sin nx].$$

הטענה נובעת מייד מטענה **1.27** (שוויון פרסבל מוכלל). אם נציב בטענה זו $f=g$ אז נקבל את שוויון פרסבל כמסקנה פרטית.

לסיום הסעיף נביא מסקנה נוספת שיוצאת מן השוויון של פרסבל. המסקנה מאשרת את הטענה הטבעית שאם לשתי פונקציות יש אותו טור פוריה אז הן למעשה זהות. אם המדובר בשתי פונקציות השייכות ל- E', אז טענה זו היא מסקנה מיידית ממשפט דיריכלה (משפט **2.6**). לגבי פונקציות השייכות ל- E בלבד אנו זקוקים לשוויון פרסבל.

טענה 2.22: (יחידות הטור פוריה) **אם** $f,g\in E$ **ואם הטור פוריה של** f **שווה לטור פוריה של** g **אז** $f(x)=g(x)$ **בכל נקודה** x **פרט אולי למספר סופי של נקודות.**

הוכחה: המקדמים בטור פוריה של $f-g$ הם כולם זהותית אפס. אזי משוויון פרסבל

$$\|f-g\|=0.$$

מתכונות הנורמה נובע ש- $f=g$, חוץ אולי ממספר סופי של נקודות (ראה הערה ה' לאחר הגדרה **2.1**). ■

תרגילים

1. חשב את האינטגרל

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{inx} \right|^2 dx .$$

2. תהי $f \in E$ ויהי

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. חשב את

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$$

במונחים של a_n ו- b_n.

3. לכל n טבעי נגדיר את הפונקציה

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} [\cos kx - \sin kx]$$

חשב את האינטגרל $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|^2 dx$.

4. תהי $f \in E$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. חשב את הסכום $I = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, כאשר נתון $f(x) = e^{-x}$.

7. תופעת גיבס

בסעיף **2.5** נסחנו תנאים מספיקים לכך שהטור פוריה יתכנס במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$ או בתת-קטע סגור שלו. התכנסות במידה שווה היא כמובן צורת ההתכנסות הרצויה ביותר, אך היא אינה מתקיימת תמיד. בסעיף זה נדון במצבים אחרים, בהם הטור אינו מתכנס במידה שווה.

תהי f פונקציה מחזורית 2π המקיימת את תנאי משפט דיריכלה בקטע $[-\pi, \pi]$. נסמן את נקודות הקפיצה של f על ידי

$$-\pi < d_1 < d_2 < \cdots < d_n \le \pi .$$

בסעיף קודם (ראה משפט **2.17**) הוכחנו כי תחת תנאים מסוימים הטור פוריה של f מתכנס במידה שווה בכל תת-קטע סגור $[a,b]$ של $[-\pi,\pi]$ אשר לא כולל בתוכו אף אחת מן הנקודות הנ"ל. אבל בסביבת הנקודות d_k, $1 \le k \le n$, קיימת תופעה לא טובה הנקראת "תופעת גיבס".

תופעה זו התגלתה על ידי הפיסיקאי מיכלסון (A. Michelson) בסוף המאה הקודמת. הוא בנה מכונה שנועדה לצייר את הגרפים של הסכומים החלקיים S_m. מיכלסון מצא שעבור פונקציות "טובות" (למשל כאלה המקיימות את תנאי משפט **2.15**) הגרפים של S_m קרובים מאוד לפונקציה f. לעומת זאת, עבור פונקציה כמו $f(x)=x$ התקבלו שגיאות גדולות יחסית בסביבת הנקודות $x=\pm\pi$. ההסבר הראשון להתנהגות זו ניתן על ידי גיבס (J. Gibbs) אשר אישר בכך את הטענה ששגיאות אלה לא נגרמו כתוצאה מטעות במכונה של מיכלסון. לכן התופעה נקראת כיום על שמו. מה שמעניין בתופעה זו היא העובדה שאותו סדר גודל של שגיאה חוזר על עצמו בכל נקודת אי-רציפות של כל פונקציה $f \in E'$.

דוגמא 2.11: תהי $\phi(x)=x$, $-\pi<x<\pi$, ו-$\phi(-\pi)=\phi(\pi)=0$. כרגיל, נניח ש-ϕ מוגדרת באופן מחזורי 2π על כל $\mathbb{R}$. בדוגמא **2.1** חישבנו את הטור פוריה של ϕ ומצאנו כי

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

לכל m טבעי, יהי

$$T_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

הסכום החלקי של הטור פוריה של ϕ, ונתבונן בנקודה $x_m=\pi-\frac{\pi}{m}$. נחשב בקירוב את $T_m(x_m)$:

$$T_m(x_m)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin n(\pi-\tfrac{\pi}{m})=\sum_{n=1}^{m}\frac{2}{n}\sin\tfrac{n\pi}{m}.$$

נקבל כי

$$T_m(x_m)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2}{n}\sin\tfrac{n\pi}{m}=2\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\frac{n\pi}{m}}\cdot\frac{\pi}{m}.$$

מן הביטוי האחרון לא קשה לראות כי $T_m(x_m)$ הוא סכום אינטגרלי של רימן של

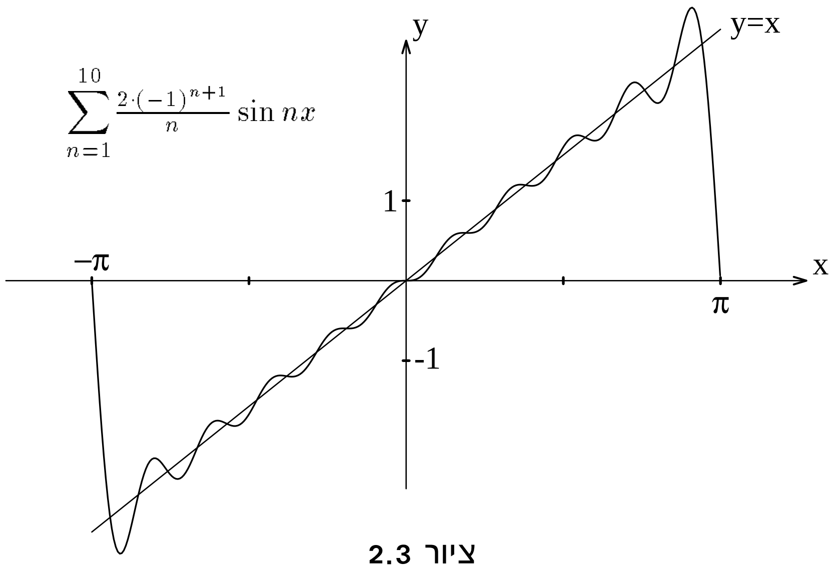
$$2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

המתקבל על ידי חלוקת הקטע $[0,\pi]$ ל- m תתי-קטעים שווים: $\left[\frac{(n-1)\pi}{m},\frac{n\pi}{m}\right]$, $1\le n\le m$.
אורכו של כל תת-קטע הוא $\frac{\pi}{m}$, ומתוך כל קטע כזה בוחרים את נקודת הקצה הימנית $\frac{n\pi}{m}$,
$1\le n\le m$. לכן

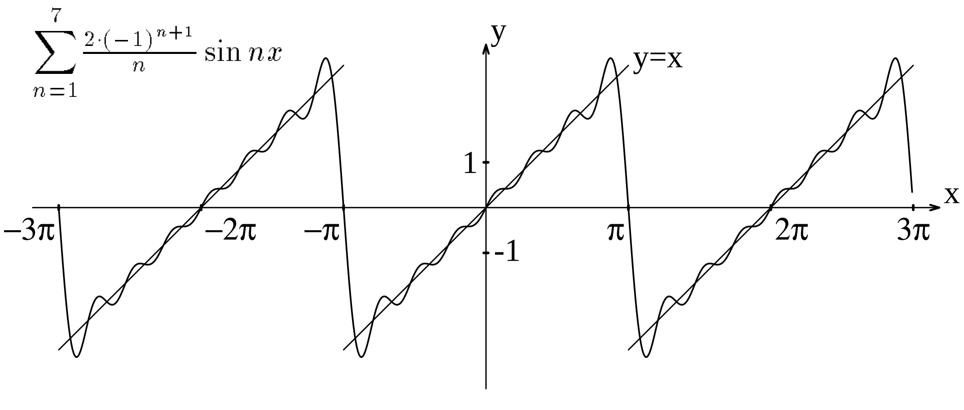
$$\lim_{m\to\infty} T_m(x) = 2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 1.18\pi\ .$$

הנקודה x_m, כאשר m שואף לאינסוף, שואפת מצד שמאל לנקודה $x=\pi$, ולכן $\phi(x_m)\approx\pi$.
גודל הקפיצה בנקודה $x=\pi$ הוא $\phi(\pi-)-\phi(\pi+)=2\pi$, ולכן עבור m מספיק גדול

$$\frac{T_m(x_m)-\phi(x_m)}{\phi(\pi-)-\phi(\pi+)} \approx \frac{1.18\pi-\pi}{2\pi} \approx 0.09\ .$$



ציור 2.3



ציור 2.4

בציורים **2.2-2.3** אפשר לראות את היחס שבין הגרפים של T_{10} ו־ T_7 ובין הגרף של ϕ. יש לשים לב למה שקורה בסביבת הנקודות $x = \pm\pi$ (ו־ $x = \pm 3\pi$). שם הגרפים של T_7 ו־ T_{10} רחוקים באופן יחסי מן הגרף של ϕ.

על סמך הדוגמא האחרונה, נביא עכשיו הוכחה כללית לקיום תופעת גיבס עבור כל פונקציה המקיימת את תנאי משפט דיריכלה.

טענה 2.23: תהי f פונקציה כך ש־ $f, f' \in E$. תהי d נקודת קפיצה של f, $-\pi \le d < \pi$, ויהי

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הסכום החלקי של הטור פוריה של f. אזי קיימת סדרת נקודות $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, $x_m > d$, כך ש־

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m(x_m) - f(x_m)}{f(d+) - f(d-)} = 0.089\,.$$

הוכחה: נניח כי $-\pi < d < \pi$, ונסמן

$$z = f(d+) - f(d-).$$

תהי ϕ הפונקציה שבדוגמא **2.11** ויהיו $T_m(x)$ הסכומים החלקיים של הטור פוריה של ϕ, כפי שהגדרנו באותה דוגמא. נגדיר את הפונקציה

$$g(x) = f(x) + \frac{z}{2\pi}\phi(x + \pi - d).$$

לא קשה לראות כי $g(d-) = g(d+)$ (ראה גם את הוכחת משפט **2.17**) ו־ $g, g' \in E$. לכן נוכל להניח כי g רציפה בנקודה $x = d$, ולכן קיים $\delta > 0$ מספיק קטן כך ש־ g רציפה בכל הקטע $[d-\delta, d+\delta]$. על פי משפט **2.17**, הטור פוריה של g מתכנס במידה שווה ל־ g בקטע $[d-\delta, d+\delta]$. נסמן ב־ U_m את הסכומים החלקיים של הטור פוריה של g. מן ההגדרות נובע

$$f(x) = g(x) - \frac{z}{2\pi}\phi(x + \pi - d)$$

ומזה נובע כי לכל x בקטע $[-\pi, \pi]$ מתקיים

$$S_m(x) = U_m(x) - \frac{z}{2\pi}T_m(x + \pi - d).$$

יהי $\epsilon > 0$. מן ההתכנסות במידה שווה של T_m ל־ g בקטע $[d-\delta, d+\delta]$ נובע שקיים m_1 כך שלכל $m \ge m_1$ ולכל x בקטע $[d-\delta, d+\delta]$ מתקיים

$$|g(x) - U_m(x)| < \epsilon|z|\,. \tag{2.10}$$

על סמך דוגמא **2.11**, קיים טבעי $m_0 \geq m_1$ כך שלכל $m \geq m_0$ קיימת נקודה x_m בתוך הקטע $[d, d+\delta]$ כך ש-

$$\frac{\phi(x_m+\pi-d) - T_m(x_m+\pi-d)}{2\pi} = 0.089 \qquad (2.11)$$

(0.089 הוא ערך שקטן במעט מן הערך האמיתי שנובע מן החישובים בדוגמא **2.11**.) לכן, לכל $m \geq m_0$, נובע מ- **(2.10)** ו- **(2.11)** ש-

$$\left|\frac{S_m(x_m) - f(x_m)}{f(d+) - f(d-)} - 0.089\right| < \epsilon$$

ומכאן הטענה. ∎

הערה: הוכחנו קיום של נקודות x_m בקטע $[d, d+\delta]$ המקיימים

$$\frac{S_m(x_m) - f(x_m)}{f(d+) - f(d-)} \approx 0.089$$

כמובן שבאותו אופן נוכל להוכיח קיום של נקודות $\tilde{x}_m$ בקטע $[d-\delta, d]$ אשר עבורם

$$\frac{S_m(\tilde{x}_m) - f(\tilde{x}_m)}{f(d+) - f(d-)} \approx -0.089$$

לא הוכחנו שהפער בין S_m ו- f בסביבת הנקודה d לא עשוי להיות יותר גדול, אך זוהי עובדה. התופעה שמתרחשת עבור כל נקודות אי-הרציפות של כל פונקציה f (המקיימת $f, f' \in E$) היא בדיוק זו שמתרחשת בנקודות $x = \pm\pi$ במקרה של הפונקציה $\phi(x) = x$.

8. טור סינוסים וטור קוסינוסים

תהי f פונקציה המקיימת את תנאי משפט דיריכלה בקטע $[0, \pi]$. קיימים אינסוף טורי פוריה שונים המתכנסים ל- f נקודתית. הסיבה לכך היא שניתן להרחיב את f לקטע $[-\pi, \pi]$ באינסוף דרכים שונות (למשל נוכל לקבוע ש- $f(x) = 0$ לכל $-\pi \leq x < 0$) כך שההרחבה תמשיך לקיים את התנאים של משפט דיריכלה. לכל אחת מן ההרחבות הללו מתאים טור פוריה אחד אשר בקטע $[0, \pi]$ יתכנס ל- f נקודתית (במובן של משפט דיריכלה). מבין כל הדרכים הרבות להרחיב את f לקטע $[-\pi, \pi]$ קיימות מספר הרחבות המביאות אותנו לטורי פוריה פשוטים יחסית. על שתיים מן ההרחבות האלה נדון בסעיף זה.

בסעיף **2.2** ראינו שאם g היא פונקציה זוגית בקטע $[-\pi, \pi]$ אזי הטור פוריה של g הוא טור קוסינוסים (מאחר וכל המקדמים $b_n = 0$). כמו-כן, אם g אי-זוגית אז הטור פוריה של g

הוא טור סינוסים. טורים כאלה הם יותר קצרים ונוחים מטורי פוריה כלליים. עובדה זו מובילה אותנו להגדיר שני טורים שונים המאפיינים את f בקטע $[0,\pi]$.

תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[0,\pi]$. נגדיר את הפונקציה $\hat{f}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le \pi \\ f(-x), & -\pi\le x<0 \end{cases}.$$

אזי $\hat{f}$ היא פונקציה זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ והיא נקראת **ההמשכה הזוגית של** f. על פי טענה **2.4**, הטור פוריה של $\hat{f}$ הוא

$$\hat{f}(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

כמו-כן, נגדיר את הפונקציה $\tilde{f}$ בקטע $[-\pi,\pi]$ על ידי

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} -f(-x), & -\pi\le x<0 \\ 0, & x=0 \\ f(x), & 0<x\le \pi \end{cases}.$$

$\tilde{f}$ היא פונקציה אי-זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ והיא נקראת **ההמשכה האי-זוגית של** f. שוב, על פי טענה **2.4**, הטור פוריה של $\tilde{f}$ הוא

$$\tilde{f}(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$$

כאשר

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

הגדרה 2.24: תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\pi]$. הטור

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

נקרא **טור הקוסינוסים** של f. כמו-כן, הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

כאשר

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

נקרא **טור הסינוסים** של f.

לדיון הזה קיימות כמה מסקנות תאורטיות. יהי $E[0,\pi]$ המרחב הליניארי של כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[0,\pi]$ המקבלות ערכים ב־ $\mathbb{C}$. על $E[0,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx\ .$$

לא קשה להוכיח כי כל אחת מן הסדרות $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ ו־ $\{\cos nt\}_{n=1}^{\infty}$ מהווה מערכת אורתונורמלית בפני עצמה במרחב $E[0,\pi]$. מן הדיון הנ"ל יוצא גם שכל אחת מן המערכות האלה היא סגורה. תכונה זו שקולה לקיום שוויון פרסבל עבור כל $f\in E[0,\pi]$ (על סמך טענה **1.24**). לא קשה לראות שעבור המערכת של הקוסינוסים, שוויון פרסבל הוא

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$$

כאשר $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$. עבור המערכת של הסינוסים, שוויון פרסבל הוא

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

כאשר $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$. מסקנה מידית נוספת היא המסקנה הבאה הנובעת מיד ממשפט **2.15**:

טענה 2.25:

א. אם f רציפה בקטע $[0,\pi]$, $f(0)=f(\pi)=0$, ואם $f'\in E[0,\pi]$, אזי טור הסינוסים של f מתכנס במידה שווה ל־ f על כל הקטע.

ב. אם f רציפה בקטע $[0,\pi]$, ואם $f'\in E[0,\pi]$, אזי טור הקוסינוסים של f מתכנס במידה שווה ל־ f על כל הקטע.

בסעיף א', התנאי $f(0) = f(\pi) = 0$ הוא תנאי הכרחי להתכנסות במידה שווה (כל טור סינוסים מתאפס בנקודות $x = 0$ ו־ $x = \pi$). בסעיף ב' לעומת זאת אין שום תנאי על f בקצות הקטע.

תרגילים

1. תהי $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$, ותהי $\tilde{f}$ ההרחבה האי-זוגית של f לקטע $[-\pi, \pi]$. מצא את הטור פוריה של $\tilde{f}$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

2. תהי $f \in E$ ויהי

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

טור הסינוסים של f, ו־

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

טור הקוסינוסים של f. למה שווה הפונקציה

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

בכל נקודה x בקטע $[-\pi, \pi]$?

3. א. פתח את טור הסינוסים של הפונקציה $f(x) = x(\pi - x)$ בקטע $[0, \pi]$.

ב. הוכח כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

ג. הוכח גם כי

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots.$$

4. א. פתח את טור הסינוסים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ של $\cos x$ בקטע $[0, \pi]$.

א. האם הטור מתכנס בכל נקודה של הקטע $[-\pi, \pi]$?

ב. נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

שרטט את הגרף של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

9. גזירה ואינטגרציה של טור פוריה

אחת מן הבעיות היסודיות של האנליזה המתמטית היא הטיפול במושג האינסוף על כל צורותיו השונות. דוגמאות לכך אפשר למצוא כמעט בכל סעיף וסעיף של ספר זה. אחת מן הבעיות הקשורות באופן עקיף לבעיה זו היא בעיית האפשרות להחליף סדר פעולות (כמו אינטגרציה, גזירה, או סכום אינסופי). דוגמא קלאסית לטיפול בבעיה מסוג זה תוצג בסעיף הזה. תהי f פונקציה המקיימת $f, f' \in E$ אשר טור פוריה שלה הוא

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

האם נכון לאמר כי

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}[-na_n \sin nx + nb_n \cos nx] ?$$

במילים אחרות, השאלה היא: האם ניתן לגזור את הטור פוריה של f איבר איבר ולקבל על ידי כך את הטור פוריה של f'? באופן כללי, התשובה לשאלה זו היא שלילית. נביא דוגמא פשוטה לכך. בדוגמא **2.1** ראינו כי הטור פוריה של $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ הוא

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

אם נגזור את הטור איבר איבר נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \cos nx$. טור זה אינו הטור פוריה של $f'(x) = 1$, משום שהטור פוריה של $f'(x) = 1$ הוא פשוט הטור פוריה המורכב מן האיבר היחיד 1! (סיבות נוספות הם שטור זה אינו מתכנס עבור $x = 0$, וסדרת מקדמיו אינה שואפת לאפס בניגוד ללמה של רימן-לבג.)

בהוכחת משפט **2.15** (ראה את ההוכחה שם) הראינו שהתשובה לשאלה הנ"ל היא חיובית אם בנוסף f רציפה על כל הקטע ומקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$. ננסח תוצאה זו במשפט הבא.

משפט 2.26: אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f' \in E$, ואם

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

אזי ניתן לגזור את הטור פוריה של f איבר איבר ולקבל

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}[-na_n \sin nx + nb_n \cos nx].$$

נעבור עכשיו לשאלה דומה בנוגע לאינטגרציה איבר איבר של הטור. כשגוזרים את הביטויים $\sin nx$ ו־ $\cos nx$ מקבלים $n\cos nx$ ו־ $-n\sin nx$. המקדם n שמופיע בשני הביטויים האחרונים מגדיל באופן ניכר את גודלם של איברי הטור החדש, ולכן עשוי לגרום לטור זה להתבדר. באינטגרציה איבר איבר, לעומת זאת, האינטגרל של הביטויים $\sin nx$ ו־ $\cos nx$ הוא $-\frac{\cos nx}{n}$ ו־ $\frac{\sin nx}{n}$, מה שמקטין עוד יותר את גודל איברי הטור החדש, ולכן ניתן לצפות שהטור החדש יתכנס, ואכן כך הוא הדבר. הבעייה היחידה שמתעוררת באינטגרציה של טור פוריה נוגעת לאיבר החופשי $\frac{a_0}{2}$, אשר האינטגרל שלו $\frac{a_0}{2}x$ אינו חוקי כאיבר בטור פוריה. לכן תוצאת אינטגרציה איבר איבר של טור פוריה לא תתן בדרך כלל טור פוריה.

משפט 2.27: **תהי $f\in E$ עם טור פוריה**

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx].$$

אזי לכל $x\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{x}f(t)dt=\frac{a_0(x+\pi)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}(\cos nx-\cos n\pi)\right]$$

והטור באגף ימין מתכנס במידה שווה לפונקציה באגף שמאל.

הוכחה: נגדיר

$$g(x)=\int_{-\pi}^{x}f(t)dt-\frac{a_0}{2}x.$$

אזי g רציפה כי $f\in E$, ובנוסף לכך מתקיים

$$g'(x)=f(x)-\frac{a_0}{2} \tag{2.12}$$

בכל נקודה x בה f רציפה. לכן $g'\in E$. מהגדרת g ברור כי $g(-\pi)=\frac{a_0\pi}{2}$ ו־

$$g(\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt-\frac{a_0\pi}{2}=a_0\pi-\frac{a_0\pi}{2}=\frac{a_0\pi}{2}.$$

לכן $g(-\pi)=g(\pi)$. הפונקציה g מקיימת את תנאי משפט **2.15**. לפי משפט זה, הטור פוריה של g מתכנס במידה שווה ל־ g בקטע $[-\pi,\pi]$. בפרט מתקיים שוויון מדויק לכל $x\in[-\pi,\pi]$

$$g(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos nx+B_n\sin nx] \tag{2.13}$$

כאשר בצד ימין רשום הטור פוריה של g. על פי משפט **2.26** (אשר g מקיימת את תנאיו),

$$.g'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}[-nA_n \sin nx + nB_n \cos nx]$$

אבל משוויון (**2.13**) נובע כי

$$.g'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

לכן, לכל $n \geq 1$, מתקיימים השוויונים

$$.nB_n = a_n, \qquad -nA_n = b_n$$

נציב תוצאות אלה בנוסחה (**2.13**) ונקבל כי

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{x} f(t)dt &= g(x) + \frac{a_0}{2}x \\ &= \frac{a_0}{2}x + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right] \end{aligned} \tag{2.14}$$

נותר לנו לחשב את המקדם A_0. לשם כך נציב $x = -\pi$ בנוסחה האחרונה ונקבל

$$.0 = -\frac{a_0}{2}\pi + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos n\pi$$

אם נחלץ את A_0, נקבל

$$.A_0 = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b_n}{n}\cos n\pi$$

נציב תוצאה זו בנוסחה (**2.14**) בכדי לקבלת את מסקנת המשפט. ∎

הערה: במשפט **2.27** ניתן להפוך את הטור שבצד ימין לטור פוריה על ידי הצבת הטור פוריה של x במקום המשתנה x שמופיע באיבר הראשון. אך על ידי פעולה זו נאבד את תכונת ההתכנסות במידה שווה של הטור הקודם, מאחר והטור פוריה של x אינו מתכנס ל־ x בנקודות $x = \pm\pi$.

תרגילים

1. תהי $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. חשב את a_n ו־ b_n.

ב. הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$ מתכנס לכל ערך של x.

ג. לכל x ממשי, נגדיר $g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$. שרטט במדויק את הגרף של g בקטע $[-2\pi, 2\pi]$.

ד. חשב את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

2. תהי $f \in E$ פונקציה זוגית כך ש־ $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 5$. נגדיר את הפונקציה

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt, \qquad -\pi \le x \le \pi.$$

יהי

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

הטור פוריה של F בקטע $[-\pi, \pi]$. נגדיר

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

חשב את $G(-\pi)$, $G(\pi)$ ואת $G(0)$.

3. תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{4} - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n.

ב. נגדיר $S(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$. חשב את $S(x)$, לכל $-\pi < x < \pi$.

4. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π כך ש־

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

נגדיר $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

א. הוכח ש־ g מחזורית 2π.

ב. יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi,\pi]$ ויהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ הטור פוריה המרוכב של g. הוכח שלכל x ממשי מתקיים השוויון

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$$

ושלכל n שלם מתקיים $d_n = \frac{c_n}{in}$.

5. א. תהי $f \in E$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. יהי $-\pi \le c \le \pi$, הוכח כי לכל x בקטע $[-\pi,\pi]$ מתקיים השוויון

$$\int_c^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0(x-c) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}(\sin nx - \sin nc) - \frac{b_n}{n}(\cos nx - \cos nc)\right]$$

ובנוסף לכך, הטור שבאגף ימין מתכנס במידה שווה לפונקציה שבאגף שמאל.

ב. תהי $g \in E[0,\pi]$, ויהי

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

טור הקוסינוסים של g בקטע $[0,\pi]$. הוכח כי לכל x בקטע $[0,\pi]$,

$$\int_0^x g(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx$$

ובנוסף לכך, הטור שבאגף ימין מתכנס במידה שווה לפונקציה שבאגף שמאל.

ג. תהי $h \in E[0,\pi]$, ויהי

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

טור הסינוסים של h בקטע $[0,\pi]$. הוכח כי לכל x בקטע $[0,\pi]$,

$$\int_0^x h(t)\,dt = \beta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx$$

כאשר $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$, ובנוסף לכך, הטור שבאגף ימין מתכנס במידה שווה לפונקציה שבאגף שמאל.

6. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, ו־ $f'\in E$. יהי

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. הוכח כי

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty} nb_n=0\,.$$

האם נכון יהיה לאמר שגם $\lim_{n\to\infty} n^2a_n=\lim_{n\to\infty} n^2b_n=0$?

10. טורי פוריה בקטעים שונים

עד עתה עסקנו בטורי פוריה על הקטע $[-\pi,\pi]$. הסיבה לכך היתה שזהו קטע נוח מאוד בכדי לפתח את התאוריה הכללית של טורי פוריה בו. אך כמובן, התאוריה שפתחנו אינה מיוחדת לקטע זה בלבד, והיא חלה על כל קטע סופי $[a,b]$. בסעיף זה נגדיר מהו טור פוריה על קטע סגור כלשהו $[a,b]$ וננמק מדוע כל המשפטים שהוכחנו בפרק זה מתקיימים באופן דומה גם עבור קטע $[a,b]$.

לכל קטע סגור $[a,b]$ יהי $E[a,b]$ המרחב הליניארי של כל הפונקציות הרציפות למקוטעין $f:[a,b]\to\mathbb{C}$.

הגדרה 2.28: תהי $f\in E[a,b]$. הטור

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right]$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx,\qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx,\qquad n=1,2,\ldots$$

נקרא **הטור פוריה של f בקטע** $[a,b]$.

מן ההגדרה ברור שאם $[a,b]=[-\pi,\pi]$ אז נקבל את הטור פוריה הרגיל. נוכל להצדיק את ההגדרה הזו בדיוק באותו האופן שבו הצדקנו את ההגדרה המקורית של הטור פוריה. כלומר, נוכל להוכיח שסדרת הפונקציות

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\frac{2n\pi x}{b-a},\quad \sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית במרחב $E[a,b]$ ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \,.$$

אנו נצדיק את הגדרה **2.28** בדרך אחרת. מאחר וכבר טרחנו לפתח את התאוריה הכללית של טורי פוריה עבור הקטע $[-\pi,\pi]$, נוכל להשתמש בתוצאות שכבר קבלנו בכדי להקל על המלאכה. נתחיל קודם כל בקטעים מן הצורה $[-c,c]$, כאשר $c>0$. תהי $f\in E[-c,c]$. נגדיר פונקציה חדשה

$$g(t)=f(\tfrac{ct}{\pi}),\qquad -\pi\le t\le\pi \,.$$

כלומר, בצענו למעשה החלפת משתנה $x=\frac{ct}{\pi}$. ברור כי g רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ ולכן יש לה טור פוריה רגיל

$$g(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nt+b_n\sin nt]$$

כאשר

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,dt,\qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,dt,\qquad n=1,2,\dots$$

נציב בחזרה את $t=\frac{\pi x}{c}$ ונקבל

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{c}+b_n\sin\frac{n\pi x}{c}\right] \tag{2.15}$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx,\qquad n=0,1,2,\dots\\ b_n&=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx,\qquad n=1,2,\dots\end{aligned} \tag{2.16}$$

קבלנו לכן את הגדרה **2.28** עבור קטעים מן הצורה $[a,b]=[-c,c]$. בשלב הבא נעבור לטפל בקטע כלשהו $[a,b]$. תהי $f\in E[a,b]$. תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ההמשכה המחזורית $b-a$ של f לכל $\mathbb{R}$. כלומר g היא הפונקציה היחידה המוגדרת על כל $\mathbb{R}$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

א. $g(x)=f(x)$, לכל $a\le x<b$.

ב. $g(x+b-a)=g(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

ברור כי g תהיה רציפה למקוטעין בכל קטע סופי, ובפרט, יש לה טור פוריה בכל קטע מן הצורה $[-c,c]$. נקח $c=\frac{b-a}{2}$. אז על פי נוסחאות **(2.15)** ו־**(2.16)** נקבל כי

$$g(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right] \tag{2.17}$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_{-c}^{c}g(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx,\qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_{-c}^{c}g(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx,\qquad n=1,2,\dots$$

הפונקציה g וגם הטור פוריה שלה מחזוריות $b-a$ על כל $\mathbb{R}$, ולכן הנוסחה **(2.17)** מתקיימת לא רק בקטע $[-c,c]$ אלא בכל $\mathbb{R}$. בפרט, נוסחה **(2.17)** נשארת נכונה בקטע $[a,b]$ (אשר בו $f(x)=g(x)$). בנוסף לכך הפונקציות $g(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}$ ו־ $g(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}$ הן מחזוריות $b-a$ על כל הישר, ולכן האינטגרלים שלהן בכל קטע באורך $b-a$ שווים (נזכיר לקורא שאם $h(x)$ היא פונקציה מחזורית L, אזי האינטגרל $\int_d^{d+L}h(x)dx$ הוא גודל קבוע אשר אינו תלוי ב־ d). לכן נוכל לרשום

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx,\qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx,\qquad n=1,2,\dots$$

ובכך סיימנו את הצדקת הגדרה **2.28**.

דוגמא 2.12: אם f היא פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\pi]$ אזי הטור פוריה של f הוא

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx,\qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2nx\,dx,\qquad n=1,2,\dots$$

נדגיש כי אין שום קשר בין טור זה לבין טור הסינוסים או טור הקוסינוסים של f בקטע $[0,\pi]$!

לבסוף, הטור פוריה המרוכב של פונקציה רציפה למקוטעין $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ הוא

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{2in\pi x}{b-a}}$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)e^{-\frac{2\pi inx}{b-a}}\,dx,\qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots.$$

תרגילים

1. תהי $f(x)=x^2$. יהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos nx+B_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[0,2\pi]$. נגדיר את הפונקציה

$$h(x)=\frac{a_0-A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-A_n)\cos nx+(b_n-B_n)\sin nx$$

לכל $-\pi\le x\le\pi$. חשב את h ושרטט במדויק את הגרף של h בקטע $[-\pi,2\pi]$.

2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית π. יהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[0,\pi]$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos nx+B_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. בטא את A_n ואת B_n באמצעות a_n ו־ b_n.

3. תהי $f(x)=\begin{cases}A\sin\omega_0 t, & 0<t<\frac{T}{2}\\ 0, & \frac{T}{2}\le t<T\end{cases}$, כאשר $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$. חשב את הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[0,T]$.

4. תהי $f \in E[a,b]$. רשום את שוויון פרסבל המתאים לפיתוח של f לטור פוריה בקטע $[a,b]$ והסבר מדוע הוא נכון.

5. תהי $f \in E[-\pi,\pi]$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f. נניח ש־ f היא מחזורית $\frac{\pi}{m}$ עבור $m \in \mathbb{N}$ נתון. הוכח כי $a_n = b_n = 0$ לכל n שאינו מתחלק ב־ $2m$.

11. שימושים למשוואות דיפרנציאליות חלקיות

סעיף זה מיועד בעקר לקורא בעל ידע מוקדם בנושא המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות או שלומד אותו במקביל. מלכתחילה, פותחה התאוריה של טורי פוריה (ע"י פוריה עצמו) על מנת לסייע בפתרון מספר בעיות מרכזיות בתחום המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות. בסעיף זה נציג את אחת השיטות הפשוטות לפתרון משוואות דיפרנציאליות חלקיות ליניאריות על ידי שימוש בטורי פוריה: **שיטת הפרדת המשתנים** (או שיטת פוריה, כפי שהיא נקראת לפעמים). נדגים שיטה זו למקרה של משוואת החום ההומוגנית על מוט סופי שאורכו $2L$, עם תנאי שפה מחזוריים. עלינו למצוא פתרון פרטי $u = u(x,t)$ לבעייה הבאה

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & (-L < x < L, \quad 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = f(x) & (-L \le x \le L) \\ u(-L,t) = u(L,t) & (0 \le t < \infty) \\ u_x(-L,t) = u_x(L,t) & (0 \le t < \infty) \end{cases} \tag{2.18}$$

כאשר $k > 0$ הוא קבוע פיזיקאלי.

מקובל גם לפרש את המערכת הזו כניסוח מתמטי לבעיית הולכת החום עבור הטמפרטורה $u(x,t)$ בטבעת מעגלית דקה באורך $2L$, כאשר בהתחלה $(t = 0)$ התפלגות הטמפרטורות על הטבעת נתונה לנו על ידי הפונקציה f. את נקודות המעגל אנו מייצגים על ידי נקודות הקטע $[-L,L]$, כאשר שתי הנקודות $x = L$ ו־ $x = -L$ מייצגות נקודה אחת במעגל. זוהי הסיבה היחידה לכך שבניסוח המתמטי של הבעייה כללנו גם את תנאי הקצה $u(-L,t) = u(L,t)$ ו־ $u_x(-L,t) = u_x(L,t)$. בכדי לקבל פתרון "טוב" לבעייה, על f להיות פונקציה רציפה, $f' \in E$, ולקיים $f(-L) = f(L) = 0$, ו־ $f'(0) = f'(L)$.

רעיון השיטה הוא למצוא את כל הפתרונות הלא-טריביאליים מהצורה $u(x,t) = X(x)T(t)$ למערכת ההומוגנית

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & -L < x < L, \quad 0 < t < \infty \\ u(-L,t) = u(L,t) & 0 \leq t < \infty \\ u_x(-L,t) = u_x(L,t) & 0 \leq t < \infty \end{cases} \tag{2.19}$$

מאוחר יותר נחפש פתרון פרטי המקיים גם את התנאי $u(x,0) = f(x)$ בתוך מרחב הפתרונות של בעייה **(2.19)**. במקרה זה ברור כי

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t), \qquad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

ולכן לאחר הצבה במשוואה נקבל

$$X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) = 0$$

ולכן

$$.X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

לאחר חילוק שני האגפים ב־ $kX(x)T(t)$ (בהנחה שזה שונה מאפס) נקבל ש־

$$.\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

הביטוי שבאגף שמאל הוא פונקציה של t בלבד, ואילו הביטוי שבאגף ימין הוא פונקציה של x בלבד. מאחר והמשתנים t ו־ x הם בלתי תלויים אחד בשני, הרי שהאפשרות היחידה ששני ביטויים אלה יהיו שווים אחד לשני היא שהם שניהם שווים לקבוע אשר נקרא לו $-\lambda$ (מסיבות של נוחיות). לכן נוכל לרשום

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

ומכך נקבל מייד זוג משוואות דיפרנציאליות רגילות

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$.T'(t) + k\lambda T(t) = 0$$

בנוסף לכך, יש בידנו שני תנאי שפה אשר מתוכם נוכל לגזור שני תנאים מצורפים עבור המשוואה הראשונה. מתנאי השפה $u(-L,t) = u(L,t)$ נובע כי לכל $t \geq 0$,

$$.X(-L)T(t) = X(L)T(t)$$

קיימות שתי אפשרויות: או ש־ $T(t) = 0$ לכל $t \geq 0$, או ש־ $X(-L) = X(L)$. האפשרות הראשונה נפסלת מן הסיבה שהיא מובילה אותנו לפתרון הטריביאלי $u(x,t) \equiv 0$, אשר בו איננו מעוניינים. לכן נותרה לנו האפשרות $X(-L) = X(L)$ בלבד. באותו אופן נקבל כי $X'(-L) = X'(L)$. לסיכום קיבלנו את הבעייה הבאה עבור X:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (0 < x < L) \\ X(-L) = X(L) \\ X'(-L) = X'(L) \end{cases} \tag{2.20}$$

בשלב זה, עלינו למצוא מהם הערכים האפשריים של λ אשר עבורם יש פתרון לא טריביאלי לבעייה. ניתן לבדוק שהערכים היחידים של λ אשר עבורם יש פתרון לא טריביאלי הם

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

עבור $\lambda_0 = 0$ המשוואה היא $X''(x) = 0$ ופתרונה הכללי הוא

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

התנאי $X(-L) = X(L)$ גורר ש־ $c_1 = 0$, והתנאי $X'(-L) = X'(L)$ אינו מטיל שום מגבלה על c_2. לכן, במקרה הזה, כל פונקציה קבועה $X(x) = C$ היא פתרון של **(2.20)**.

עבור $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ המשוואה היא

$$X''(x) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} X(x) = 0$$

ופתרונה הכללי הוא

$$X(x) = c_1 \sin\frac{n\pi}{L}x + c_2 \cos\frac{n\pi}{L}x.$$

תנאי הקצה $X(-L) = X(L)$ ו־ $X'(-L) = X'(L)$ מתקיימים על ידי כל אחד מן הפתרונות האלה ולכן אינם מטילים שום מגבלות על הקבועים c_1 ו־ c_2.

לסיכום נוכל לומר שלכל n טבעי, לערך $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ מתאימים שני פתרונות לא טריביאליים בסיסיים

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}x, \qquad X_n^*(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}x.$$

כל הפתרונות האחרים הם כמובן צירופים ליניאריים של שני פתרונות אלה. הערכים λ_n נקראים **הערכים העצמיים** של הבעייה, והפתרונות X_n ו־ X_n^* נקראים **הפונקציות העצמיות** של

הבעייה השייכות לערך העצמי λ_n. נזכור רק שבקבוצת הערכים העצמיים עלינו לכלול גם את הערך העצמי $\lambda_0 = 0$, שהפונקציה העצמית השייכת לו היא

$$X_0(x) = 1.$$

נעבור עתה למשוואה השנייה $T'(t) + k\lambda T(t) = 0$. כמובן λ מוגבל עכשיו רק לערכים העצמיים $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. לכל n כזה מתאים פתרון לא טריביאלי

$$T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}.$$

פתרונות האחרים הם כפולות שלו בקבוע. לסיכום, עבור כל n טבעי, יש בידנו זוג פתרונות לא טריביאליים למערכת (**2.19**):

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}\cos\tfrac{n\pi x}{L}$$
$$u_n^*(x,t) = X_n^*(x)T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}\sin\tfrac{n\pi x}{L}.$$

עבור $n = 0$ יש לנו את הפתרון

$$u_0(x,t) = X_0(t)T_0(t) = 1.$$

מאחר והמערכת (**2.19**) הומוגנית הרי שכל "צירוף ליניארי אינסופי" של הפתרונות שקבלנו עשוי להיות פתרון (במידה והוא מתכנס), ולכן אנו מקבלים אינסוף פתרונות מן הצורה הכללית

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\lambda_n t}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]. \tag{2.21}$$

ניתן להוכיח כי זוהי צורתו של הפתרון הכללי לבעייה (**2.19**). עכשיו נגש למציאת הפתרון הפרטי עבור בעייה (**2.18**). עלינו להתייחס לתנאי ההתחלה הלא-הומוגני $u(x,0) = f(x)$, $-L \le x \le L$. מתנאי זה עלינו לחשב את שתי סדרות המקדמים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. אם נציב $t = 0$ בפתרון הכללי נקבל

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right].$$

כלומר, עלינו לחשב את הטור פוריה של f בקטע $[-L, L]$. על סמך בנוסחאות (**2.16**) של הסעיף הקודם

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ובכך מצאנו את הפתרון הפרטי לבעייה (**2.18**). לא קשה להוכיח כי עם המקדמים האלו, הטור (**2.21**) (וגם נגזרותיו החלקיות מסדר כלשהו) מתכנס במידה שווה ובהחלט לכל ערך של x בקטע $[-L,L]$ וערך של t בקטע $[0,\infty)$. בנוסף לכך אפשר לבדוק כי טור זה מקיים את משוואת החום.

תרגילים לחזרה כללית

1. תהי $f(x)=x+\cos x$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{nx}{2}+b_n\sin\frac{nx}{2}\right]$$

הטור פוריה של f בקטע $[0,4\pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n.

ב. תהי $g(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{5}B_n\sin\frac{nx}{2}$. עבור איזה ערכים של A_0 ו־ B_n, $1\le n\le 5$, המרחק בין f ו־ g מינימלי?

2. תהי $f(x)=x^2$ עבור $\pi\le x\le 3\pi$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[\pi,3\pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n.

ב. תהי $g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx}{2}$, $-\pi\le x\le\pi$. חשב את g ושרטט את הגרף של g בקטע $[-\pi,\pi]$.

ג. תהי $h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx}{2}$, $-\pi\le x\le\pi$. חשב את h ושרטט את הגרף של h בקטע $[-\pi,\pi]$.

3. תהי $f(x)=|\sin x|$, ויהי

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n.

ב. תהי $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[-na_n\sin nx+nb_n\cos nx]$. שרטט במדויק את הגרף של g בקטע $[-\pi,\pi]$.

ג. חשב את הסכומים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$$

4. מצא את הטור פוריה המרוכב של $f(t)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-it}}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π, ויהי

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi,\pi]$. נגדיר את הפונקציה

$$g(x)=\frac{f(x)+f(x+\pi)}{2}$$

ויהי

$$g(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_ne^{inx}$$

הטור פוריה המרוכב של g בקטע $[-\pi,\pi]$.

א. בטא את המקדמים d_n באמצעות המקדמים c_n.

ב. אם $f(x)=x$, לכל $-\pi<x<\pi$, למה שווה הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}|c_{2n}|^2$?

6. לגבי הפונקציה f ידוע שלכל x ממשי $f(x+\pi)=f(x)$, לכל $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\sin 2x$, ולכל $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$, $f(x)=0$.

א. הוכח שלכל x ממשי

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{(2n-1)(2n+1)}$$

הסק מכך ש־

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{\pi^2-8}{16}$$

ב. חשב למה שווה הסכום

$$\frac{\sin 4x}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\sin 8x}{3\cdot4\cdot5}+\frac{\sin 12x}{5\cdot6\cdot7}+\cdots,\qquad 0\le x\le\pi$$

7. תהי $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ e^x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$, ויהי

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. חשב את a_n ו־ b_n.

ב. חשב את $F(0)$, $F(\frac{\pi}{2})$, ו־ $F(\pi)$.

ג. שרטט סקיצה של הגרף של F בקטע $[-2\pi, 2\pi]$.

ד. חשב את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

8. תהי $f(x) = e^{x(1+2\pi i)}$.

א. חשב את הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-1, 1]$.

ב. חשב את הטור פוריה הממשי של f בקטע $[-1, 1]$.

ג. חשב את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2\pi^2}$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}$.

9. א. פתח את הטור פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. על סמך הטור פוריה שקבלת, הוכח כי

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots.$$

ג. הוכח כי $\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

10. בקטע $[-\pi, \pi]$ נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצא את הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב. מצא את הטור פוריה של f' בקטע $[-\pi, \pi]$.

ג. למה מתכנס הטור פוריה של f' בנקודות $x = \pm\frac{\pi}{2}$?

ד. חשב את הסכומים הבאים

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(-1)^k}{(2k-3)(2k+1)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-3)^2(2k+1)^2}$$

11. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π, ויהי

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi,\pi]$. תהי

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} [f(t) + f(\pi - t)]\, dt$$

ויהי

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos nx + B_n \sin nx]$$

הטור פוריה של g בקטע $[-\pi,\pi]$. בטא את A_n ו־ B_n על ידי a_n ו־ b_n.

12. יהי $C[-\pi,\pi]^n$ מרחב כל הפונקציות הרציפות המוגדרות על $[-\pi,\pi]^n$ המקבלות ערכים ב־ $\mathbb{C}$. במרחב זה נגדיר את המכפלה הפנימית

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{פעמים } n} f(x_1,\ldots,x_n)\overline{g(x_1,\ldots,x_n)}\, dx_1 \cdots dx_n .$$

הוכח כי משפחת הפונקציות

$$\left\{e^{i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)}\right\}_{m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}}$$

מהווה מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה פנימית זו. אם נגדיר

$$c_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{פעמים } n} f(x_1,\ldots,x_n) e^{-i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)} dx_1 \cdots dx_n$$

אזי הטור

$$\sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} c_{m_1,\ldots,m_n} e^{i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)}$$

נקרא **הטור פוריה המרובב הרב-מימדי** של f. הוכח שאם f_1, f_2, ... , f_n הן פונקציות השייכות ל־ $C[-\pi,\pi]$, ואם

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$$

אזי

$$c_{m_1,\ldots,m_n} = a^1_{m_1} a^2_{m_2} \cdots a^n_{m_n}$$

כאשר a^k_m הם מקדמי הטור פוריה המרוכב של f_k. כלומר $f_k(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^k_m e^{imx}$.