פרק 3
התמרת פוריה

0. הקדמה

בפרק זה נלמד על התמרת פוריה. בחמשת הסעיפים הראשונים של הפרק נלמד את התאוריה של התמרת פוריה. רצוי במיוחד לשים לב לנושאים של ההתמרת ההפוכה, נוסחת פלנשראל, והקונבולוציה. בסעיף **3.6** נציג שימושים של התמרת פוריה לפתרון משוואות דיפרנציאליות חלקיות. בסעיף **3.7** נשתמש בהתמרת פוריה (וגם בטורי פוריה) בכדי לפתור כמה בעיות בתורת האינפורמציה ועבוד אותות. התמרת פוריה היא אחת משתי ההתמרות האינטגרליות שעליהן נלמד בספר זה. פוריה עצמו הגדיר והשתמש לראשונה בהתמרה זו, אשר בצדק קרויה על שמו.

1. הגדרה ותכונות יסודיות

תהי f פונקציה המוגדרת על כל $\mathbb{R}$ עם ערכים ב־ $\mathbb{C}$. נגדיר באופן פורמלי פונקציה $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ על ידי

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx.$$

הגדרה זו היא פורמלית במובן שהאינטגרל שבאגף ימין אינו תמיד קיים. אם הוא קיים, אז הפונקציה F (או $\mathcal{F}[f]$) נקראת **ההתמרת פוריה** (Fourier transform) של f. בספרים רבים משתמשים בסימון $\hat{f}(\omega)$ עבור ההתמרת פוריה של f.

קיים קשר בין הטור פוריה ובין ההתמרת פוריה שלא נכנס אליו כאן. נציין רק שהטור פוריה מיועד עבור פונקציות המוגדרות על קטע סופי (או פונקציות מחזוריות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$) אך ההתמרת פוריה נועדה לטפל בפונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ (אשר אינן מחזוריות). נסמן על ידי $G(\mathbb{R})$ את קבוצת כל הפונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ עם ערכים ב־ $\mathbb{C}$ שהן רציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט. נציין כי

א. f **רציפה למקוטעין** על כל $\mathbb{R}$ אם היא רציפה למקוטעין על כל קטע סופי $[a,b]$. נובע מכך שיתכן שיש ל־ f מספר בן-מנייה של נקודות אי-רציפות (אך רק מספר סופי של נקודות כאלה בכל קטע סופי). דוגמא פשוטה למצב כזה היא פונקצית הערך השלם $f(x)=[x]$ אשר כל מספר שלם $x=n$ הוא נקודת אי-רציפות שלה.

ב. f **אינטגרבילית בהחלט** מעל $\mathbb{R}$ אם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$. כלומר האינטגרל מעל כל $\mathbb{R}$ של $|f|$ קיים וסופי.

לא קשה לבדוק כי $G(\mathbb{R})$ הוא מרחב ליניארי מעל $\mathbb{C}$. מן ההגדרה ברור כי לכל $f\in G(\mathbb{R})$ ההתמרת פוריה של f קיימת ומוגדרת לכל $\omega\in\mathbb{R}$. בנוסף לכך קיימות עוד כמה תכונות שיש לפונקציות אלה.

משפט 3.1: לכל $f\in G(\mathbb{R})$,

1. $F(\omega)$ מוגדר לכל $\omega\in\mathbb{R}$;

2. F היא פונקציה רציפה ב־ $\mathbb{R}$;

3. $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty}F(\omega)=0$.

בכדי להוכיח משפט זה נשתמש במשפט עזר ידוע מאוד בתחום האנליזה הקלאסית. אשר שמו באנגלית הוא Lebesgue Dominated Convergence Theorem.

משפט 3.2: (משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג) תהי $\{f_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ משפחת פונקציות רציפות למקוטעין ב־ $\mathbb{R}$ ונניח כי:

1. קיימת פונקציה g כך ש־ $|f_h(x)|\le g(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $h\in\mathbb{R}$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dx<\infty$;

3. $\lim_{h\to0}f_h(x)=f(x)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

אזי

$$\lim_{h\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_h(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx\,.$$

כפי שכבר אמרנו, אחת מן הבעיות המרכזיות בתחום האנליזה הקלאסית היא בעיית הטיפול במושג האינסוף, או האפשרות לשנות סדר של פעולות. משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג הוא אחד מן המשפטים שמציג תנאים אשר תחתיהם ניתן לשנות את סדר הפעולות $\int_{-\infty}^{\infty}$ ו־ $\lim\limits_{n\to\infty}$. באופן כללי לא ניתן לעשות זאת. לדוגמא נתבונן בסדרת הפונקציות:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & n\le x\le n+1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

ותהי $f\equiv0$ (כלומר $f(x)=0$ לכל x). ברור שלכל x ממשי מתקיים

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ושלכל n, $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1$. לכן

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

העובדה שמדובר כאן באינטגרל לא אמיתי מעל כל $\mathbb{R}$ אינה מקור לבעייה. תופעות דומות קורות גם כאשר מדובר באינטגרל הרגיל של רימן מעל קטע סופי. הקיום של פונקציה g, המקיימת את התנאים **1** ו־**2** במשפט **3.2**, מאפשר לנו לשנות את סדר הפעולות. הוכחת משפט זה חורגת ממסגרתו של ספר זה.

הוכחת משפט 3.1:

1. מן העובדה ש־ $|e^{-i\omega x}| = 1$, לכל x ו־ ω ממשיים, נובע כי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)e^{-i\omega x}\right| dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty\,.$$

לכן הפונקציה $f(x)e^{-i\omega x}$ אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, לכל ערך ממשי ω. כמו-כן, ברור ש־ $f(x)e^{-i\omega x}$ רציפה למקוטעין מעל $\mathbb{R}$, ולכן פונקציה זו שייכת ל־ $G(\mathbb{R})$. לכן הפונקציה $F(\omega)$ מוגדרת לכל ערך ממשי של ω.

2. יהי $\omega \in \mathbb{R}$. נוכיח כי F רציפה בנקודה ω. בכדי להוכיח טענה זו נוכיח ש־

$$\lim_{h\to 0}[F(\omega+h) - F(\omega)] = 0\,.$$

נשתמש בהגדרה של F:

$$\begin{aligned} F(\omega+h) - F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega+h)x}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\left[e^{-ihx} - 1\right] dx \end{aligned}$$

לכל מספר ממשי h נגדיר את הפונקציה

$$f_h(x) = f(x)e^{-i\omega x}\left[e^{-ihx} - 1\right].$$

עכשיו, לכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f_h(x) &= \lim_{h\to 0} f(x)e^{-i\omega x}\left[e^{-ihx} - 1\right] \\ &= f(x)e^{-i\omega x}\,\lim_{h\to 0}\left[e^{-ihx} - 1\right] \\ &= f(x)e^{-i\omega x}\cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

בנוסף לכך

$$|f_h(x)| = |f(x)| \cdot |e^{-i\omega x}| \cdot |e^{-ihx} - 1| \leq |f(x)| \cdot 1 \cdot 2 = 2|f(x)|.$$

הפונקציה $g(x) = 2|f(x)|$ מקיימת את התנאים **1** ו־**2** של משפט **3.2**. לכן ממשפט זה נקבל

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)\, dx = 0 .$$

כלומר $\lim_{h\to 0}[F(\omega+h) - F(\omega)] = 0$, ולכן F רציפה בכל נקודה $\omega \in \mathbb{R}$.

.3

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to \pm\infty} F(\omega) &= \lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \\ &= \lim_{\omega \to \pm\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x\, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x\, dx \right] \end{aligned}$$

בכדי להוכיח כי $\lim_{\omega \to \pm\infty} F(\omega) = 0$ יספיק להוכיח ש־

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x\, dx = 0$$

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x\, dx = 0$$

נסתפק בהוכחת השוויון הראשון מאחר והוכחת השוויון השני דומה.

נתון לנו כי f אינטגרבילית בהחלט מעל כל $\mathbb{R}$. לכן לכל $\epsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך ש־

$$\int_{|x|>M} |f(x)|\, dx < \epsilon$$

ומזה יוצא

$$\left| \int_{|x|>M} f(x) \cos \omega x\, dx \right| \leq \int_{|x|>M} |f(x) \cos \omega x|\, dx \leq \int_{|x|>M} |f(x)|\, dx < \epsilon .$$

לכן אם נוכיח כי

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \int_{-M}^{M} f(x) \cos \omega x\, dx = 0$$

עבור M סופי כלשהו אז נקבל את התוצאה הרצויה. נציין שאילו ω היה מקבל רק ערכים שלמים אזי עובדה זו נובעת מייד מן הלמה של רימן-לבג (טענה **2.11**). אבל ω מקבל כל ערך

ממשי ולכן נצטרך להוכיח זאת. הפונקציה f רציפה למקוטעין בקטע $[-M,M]$ ולכן, עבור כל $\epsilon>0$, קיימת חלוקה של הקטע $[-M,M]$

$$-M=x_0<x_1<\cdots<x_m=M$$

כך שעבור פונקצית המדרגות

$$h(x)=f(x_k),\qquad x_{k-1}<x\le x_k,\quad k=1,2,\dots,m$$

מתקיים

$$\int_{-M}^{M}|f(x)-h(x)|\,dx<\epsilon\,.$$

כלומר, ניתן להתקרב ל־ f במובן הנ"ל על ידי פונקצית המדרגות h. עובדה זו נובעת מהגדרת האינטגרל של רימן. עתה

$$\int_{-M}^{M}f(x)\cos\omega x\,dx=\int_{-M}^{M}[f(x)-h(x)]\cos\omega x\,dx+\int_{-M}^{M}h(x)\cos\omega x\,dx\,.$$

נוכיח שכל אחד מן האינטגרלים שבאגף ימין שואף לאפס כאשר ω שואף לאינסוף. לכל $\omega\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-M}^{M}[f(x)-h(x)]\cos\omega x\,dx\right|&\le\int_{-M}^{M}|f(x)-h(x)|\cdot|\cos\omega x|\,dx\\&\le\int_{-M}^{M}|f(x)-h(x)|\,dx\\&<\epsilon\end{aligned}$$

לגבי האינטגרל השני:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-M}^{M}h(x)\cos\omega x\,dx\right|&=\left|\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\cos\omega x\,dx\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^{m}f(x_k)\frac{\sin\omega x_k-\sin\omega x_{k-1}}{\omega}\right|\\&\le\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)|\frac{2}{\omega}\\&\le\frac{2m}{\omega}\max_{-M\le x\le M}|f(x)|\end{aligned}$$

לכן עבור כל ω מספיק גדול יתקיים

$$\frac{2m}{\omega}\max_{-M\le x\le M}|f(x)|<\epsilon$$

ולכן

$$\left|\int_{-M}^{M} f(x)\cos\omega x\,dx\right| < 2\epsilon$$

ובכך סיימנו. ∎

2. דוגמאות

דוגמא 3.1: תהי $f(x) = e^{-|x|}$. לא קשה לבדוק ש- f אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$. נחשב את ההתמרת פוריה של f:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-x-i\omega x}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x-i\omega x}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\infty} e^{x(-1-i\omega)}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{L\to\infty}\left.\frac{e^{x(-1-i\omega)}}{-1-i\omega}\right|_{0}^{L} + \lim_{M\to\infty}\left.\frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right|_{-M}^{0}\right]
\end{aligned}$$

מן העובדה ש- $\lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0$ נקבל ש-

$$\lim_{L\to\infty}\frac{e^{L(-1-i\omega)}}{-1-i\omega} = \lim_{L\to\infty}\frac{e^{-L}e^{-i\omega L}}{-1-i\omega} = 0$$

$$\lim_{M\to\infty}\frac{e^{-M(1-i\omega)}}{1-i\omega} = \lim_{M\to\infty}\frac{e^{-M}e^{iM\omega}}{1-i\omega} = 0 .$$

לכן

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+i\omega}+\frac{1}{1-i\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-i\omega+1+i\omega}{1+\omega^2}\right] = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}.$$

קבלנו שההתמרת פוריה של $e^{-|x|}$ היא $\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

דוגמא 3.2: נחשב את ההתמרת פוריה של

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \le x \le b \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר $-\infty < a < b < \infty$.

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\bigg|_a^b = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega}$$

במקרה המיוחד $a = -b$, $b > 0$, נקבל ש-

$$F(\omega) = \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega} = \frac{\sin\omega b}{\omega\pi}.$$

לפעמים מסמנים $\mathrm{sinc}(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega}$, ולכן ניתן גם לרשום

$$F(\omega) = \frac{b}{\pi}\mathrm{sinc}(b\omega).$$

דוגמא 3.3: נחשב עכשיו את ההתמרת פוריה של $f(x) = e^{-x^2}$, $-\infty < x < \infty$.
נעשה זאת בדרך עקיפה. לפי ההגדרה

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}\,dx$$

ולכן

$$F'(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}\,dx.$$

ניתן להוכיח כי אפשר להחליף את סדר האינטגרציה והגזירה ביחס ל- ω (מדוע?) ולכן

$$F'(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-ix)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-2xe^{-x^2})e^{-i\omega x}\,dx.$$

על ידי אינטגרציה לפי חלקים נקבל

$$F'(\omega) = \frac{i}{4\pi}\left[e^{-x^2}e^{-i\omega x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-i\omega e^{-i\omega x})\,dx\right].$$

נחשב את הביטוי הראשון שבאגף ימין:

$$e^{-x^2}e^{-i\omega x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{L,M\to\infty}\left[e^{-L^2}e^{-i\omega L} - e^{-M^2}e^{i\omega M}\right] = 0$$

ולכן

$$F'(\omega) = -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-i\omega)e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= -\frac{\omega}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= -\frac{\omega}{2}F(\omega)$$

לא חישבנו את F, אך הראינו כי פונקציה זו מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה מסדר ראשון

$$F'(\omega)+\frac{\omega}{2}F(\omega)=0.$$

על ידי אחת מן השיטות המתאימות לפתרון משוואות דיפרנציאליות מסוג זה נמצא כי הפתרון הכללי של משוואה זו הוא

$$F(\omega)=Ae^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

כאשר A הוא קבוע שרירותי. בכדי לסיים את החישוב, עלינו לקבוע את A. לשם כך דרוש לנו תנאי התחלה כלשהו עבור F. נציב $\omega=0$ בהגדרה של F ונקבל

$$A=F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{0}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx.$$

ידוע כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

(ראה תרגיל **2**), ולכן

$$A=F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

ולבסוף נקבל

$$F(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f_a(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{a}, & |x|<a\\ 0, & |x|\ge a\end{cases}$

ב. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$

ג. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 2, & 1<|x|<2\\ 0, & |x|\ge 2\end{cases}$

ד. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$

ה. $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$

ו. $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

ז. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ ח. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

ט. $f(x) = |x|e^{-|x|}$

2. הוכח כי $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.
הדרכה: לא קשה לראות ש- $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$. על ידי החלפת משתנים פולרית קבל את השוויון $I^2 = \pi$.

3. תכונות ונוסחאות

בסעיף זה נמנה מספר תכונות ונוסחאות כלליות עבור ההתמרת פוריה המאפשרות לנו במקרים רבים לחשב אותה יותר מהר ובצורה יותר נוחה. נשתמש לפעמים בסימן $\mathfrak{F}[f]$ או F בכדי לציין את ההתמרת פוריה של $f \in G(\mathbb{R})$.

3.1. ליניאריות: לכל $f, g \in G(\mathbb{R})$ ולכל $a, b \in \mathbb{C}$, הפונקציה $af + bg$ נמצאת ב- $G(\mathbb{R})$ ובנוסף לכך

$$\boxed{\mathfrak{F}[af+bg](\omega) = a\mathfrak{F}[f](\omega) + b\mathfrak{F}[g](\omega)}$$

תכונה זו נובעת מייד מן הליניאריות של האינטגרל הלא-אמיתי.

3.2. לכל $f \in G(\mathbb{R})$, אם f מקבלת ערכים ב- $\mathbb{R}$ בלבד, אזי

$$\boxed{F(-\omega) = \overline{F(\omega)}}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} F(-\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-\omega)x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx} \\ &= \overline{F(\omega)} \end{aligned}$$

∎

3.3. אם $f \in G(\mathbb{R})$ היא פונקציה ממשית וזוגית אזי F היא פונקציה ממשית וזוגית. אם f ממשית ואי-זוגית אזי F היא פונקציה מדומה טהורה ואי-זוגית.

הוכחה: נסתפק בהוכחת הטענה הראשונה. נניח כי f היא פונקציה ממשית וזוגית. אזי

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos\omega x - i\sin\omega x]\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx
\end{aligned}$$

האינטגרל השני התאפס כי $f(x)\sin\omega x$ היא פונקציה אי-זוגית מעל $\mathbb{R}$. לכן נותרנו רק עם החלק הממשי של ההתמרה. בנוסף לכך קבלנו שאם f ממשית וזוגית אז

$$.F(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

הזוגיות של $F(\omega)$ נובעת מן הזוגיות של $\cos\omega x$. ∎

3.4. **נוסחת ההזזה:** תהי $f \in G(\mathbb{R})$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. אזי הפונקציה

$$g(x) = f(ax+b)$$

שייכת ל- $G(\mathbb{R})$, ו-

$$\boxed{\mathfrak{F}[g](\omega) = \tfrac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\mathfrak{F}[f](\tfrac{\omega}{a})}$$

הוכחה:

$$.\mathfrak{F}[g](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)e^{-i\omega x}\,dx$$

נציב $y = ax+b$ ונקבל

$$a > 0 \Longrightarrow \mathfrak{F}[g](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega\left(\frac{y-b}{a}\right)}\frac{dy}{a}$$

$$.a < 0 \Longrightarrow \mathfrak{F}[g](\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega\left(\frac{y-b}{a}\right)}\frac{dy}{a}$$

לכן, בכל מקרה, נקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{i\omega y}{a}}\,dy \\ &= \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\mathcal{F}[f](\frac{\omega}{a})\end{aligned}$$

■

שני מקרים מיוחדים של הנוסחה האחרונה הם כאשר:

א. $b = 0$. כלומר, $g(x) = f(ax)$, $a \neq 0$, ואז

$$\boxed{\mathcal{F}[g](\omega) = \tfrac{1}{|a|}\mathcal{F}[f](\tfrac{\omega}{a})}$$

ב. $a = 1$. כלומר $g(x) = f(x+b)$, ואז

$$\boxed{\mathcal{F}[g](\omega) = e^{i\omega b}\mathcal{F}[f](\omega)}$$

בגלל השימושים של התמרת פוריה בפיזיקה ובהנדסת חשמל, מקובל לפרש את המשתנה x כזמן ואת המשתנה ω כתדר. במונחים אלה אפשר לפרש את הנוסחה האחרונה כך: הזזה בזמן שקולה לסיבוב בתדר.

3.5. לכל $f \in G(\mathbb{R})$ ולכל $c \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathcal{F}[e^{icx}f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c)}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{icx}f(x)](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{icx}f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-c)x}\,dx \\ &= \mathcal{F}[f](\omega - c)\end{aligned}$$

■

נוסחה זו יכולה להתפרש באופן דומה לנוסחה הקודמת: סיבוב בזמן שקול להזזה בתדר.

3.6. נוסחאות המודולציה (Modulation)**:** לכל $f \in G(\mathbb{R})$ ולכל $c \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)\cos cx](\omega) &= \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c)+\mathcal{F}[f](\omega+c)}{2}\\ \mathcal{F}[f(x)\sin cx](\omega) &= \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c)-\mathcal{F}[f](\omega+c)}{2i}\end{aligned}}$$

הוכחה: נוכיח רק את הנוסחה הראשונה. הוכחת הנוסחה השנייה דומה לחלוטין.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)\cos cx](\omega) &= \mathcal{F}\left[f(x)\frac{e^{icx}+e^{-icx}}{2}\right](\omega)\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f(x)e^{icx}\right](\omega)+\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[f(x)e^{-icx}\right](\omega)\\ &= \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c)+\mathcal{F}[f](\omega+c)}{2}\end{aligned}$$

∎

3.7. נוסחת הנגזרת: תהי f פונקציה רציפה כך ש־ $f, f' \in G(\mathbb{R})$ ו־ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. אזי

$$\boxed{\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega)}$$

הוכחה:

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx = \lim_{L,M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{L} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

נחשב את האינטגרל האחרון על ידי אינטגרציה לפי חלקים:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{L} f'(x)e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-M}^{L} - \int_{-M}^{L} f(x)(-i\omega)e^{-i\omega x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[f(L)e^{-i\omega L} - f(-M)e^{i\omega M} + i\omega\int_{-M}^{L} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right]$$

נתון לנו כי $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ולכן

$$\lim_{L,M\to\infty}\left[f(L)e^{-i\omega L} - f(-M)e^{i\omega M}\right] = 0.$$

מאחר ו־ $f \in G(\mathbb{R})$ הרי ש־

$$\lim_{L,M\to\infty}\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-M}^{L} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = i\omega\,\mathcal{F}[f](\omega).$$

∎

באופן דומה מוכיחים, כי תחת התנאים המתאימים,

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\omega) = (i\omega)^n\,\mathcal{F}[f](\omega)}$$

3.8. תהי $f \in G(\mathbb{R})$ כך שהאינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|\,dx$ מתכנס. אזי ההתמרת פוריה של f גזירה ברציפות ומתקיים השוויון

$$\boxed{\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i\tfrac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega)}$$

הוכחה: אם f רציפה ב־ $\mathbb{R}$ אז האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx$ מתכנס במידה שווה מעל $\mathbb{R}$, ולכן על פי הכלל של לייבניץ ניתן לבצע גזירה לפי ω מתחת לסימן האיטגרל,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{d}{d\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}\left[f(x)e^{-i\omega x}\right]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-i\omega x}dx = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= -i\mathcal{F}[xf(x)]\end{aligned}$$

ונקבל את התוצאה. אחרת, אם ל־ f יש נקודות אי־רציפות, אז תהי $\{(a_n,b_n)\}_{n\in I}$ משפחת כל הקטעים בהם f רציפה (a_n יכול להיות שווה $-\infty$, b_n יכול להיות שווה ∞, והאיחוד של כל הקטעים שווה $\mathbb{R}$ ללא נקודות אי־הרציפות). אזי

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \sum_{n\in I}\frac{1}{2\pi}\int_{a_n}^{b_n} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

כאשר הטור באגף ימין מתכנס במידה שווה מעל $\mathbb{R}$. לכן נוכל לגזור באופן דומה את $\mathcal{F}[f](\omega)$ מתחת לסימן הסכום וגם מתחת לסימן האינטגרל, ונקבל את התוצאה. ∎

באופן דומה נוכל להוכיח שאם $f \in G(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, ואם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)|\,dx$ מתכנס, אזי ההתמרת פוריה של f גזירה ברציפות n פעמים ומתקיים השוויון

$$\boxed{\mathcal{F}[x^n f(x)](\omega) = i^n\tfrac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}[f](\omega)}$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$

ב. $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$

ג. $f(x) = 4xe^{-x^2}$

2. תהי

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

מצא את ההתמרת פוריה של

א. $f(x) = H(x)e^{-ax}$, $a > 0$

ב. $f(x) = H(x)e^{-ax}\cos bt$, $a > 0$, $b \neq 0$

ג. $g(x) = H(x)e^{-ax}\sin bt$, $a > 0$, $b \neq 0$

3. תהי $f \in G(\mathbb{R})$. חשב את ההתמרת פוריה של

א. $f(-x)$

ב. $f(x-x_0)$, x_0 קבוע ממשי

ג. $f(x)e^{i\omega_0 x}$, ω_0 קבוע ממשי

ד. $f(x)\sin\omega_0 x$

ה. $f(x)\cos\omega_0 x$

ו. $e^{ix}f(3x)$

ז. $f(2x)$

4. תהי $y(x)$ בעלת נגזרת שנייה רציפה, חסומה, ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, המקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית

$$y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0.$$

איזו משוואה דיפרנציאלית מקיימת $\mathcal{F}[y]$?

5. על ידי שימוש בהתמרת פוריה, פתור את הבעייה

$$y'' + xy' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

6. תהי f פונקציה בעלת נגזרת מסדר שני בכל $\mathbb{R}$ כך ש- $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, $tf(t)$, ו- $t^2f(t)$ רציפות ואינטגרביליות בהחלט מעל $\mathbb{R}$. נסמן את ההתמרת פוריה של f על ידי F. מצא מספר ממשי $c \in \mathbb{R}$ כך שאם

$$f''(t) + (t^2-2)f(t) = cf(t), \qquad (t \in \mathbb{R})$$

אזי

$$F''(\omega) + (\omega^2 - 2)F(\omega) = cF(\omega)$$

7. נתון ש־ $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$ חשב את $\mathcal{F}[x^2 f''(x) + 2f'''(x)](\omega)$.

4. ההתמרה ההפוכה ושוויון פלנשראל

ההתמרה של פוריה היא למעשה פעולה מתמטית הפועלת על פונקציה f ונותנת כתוצאה פונקציה שנייה F (פעולה מסוג זה נקראת לפעמים גם **אופרטור**). קיימת עוד פעולה פשוטה ודומה שמאפשרת לנו לחזור מההתמרת פוריה אפונקציה המקורית. לפעולה הזו אנו קוראים **ההתמרת פוריה ההפוכה**. באופן פורמלי, הפעולה הזו נתונה על ידי הנוסחה

$$.f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\, d\omega$$

הבעייה שלנו תהיה לדעת תחת איזה תנאים ניתן להשתמש בה ובאיזה מובן היא אכן ההתמרה ההפוכה להתמרת פוריה. לפני שנענה על שאלות אלה נציין כאן כי בספרים שונים ההגדרות של התמרת פוריה וההתמרה ההפוכה לה הן שונות מכפי שאנו הגדרנו אותן בספר זה. בספרים מסוימים, ההגדרה של התמרת פוריה זהה להגדרת ההתמרה ההפוכה אצלנו, עם או בלי המקדם $\frac{1}{2\pi}$ לפני סימן האינטגרל. בספרים אלה, כמובן, ההתמרה ההפוכה מוגדרת כפי שאנו הגדרנו את התמרת פוריה עצמה. בספרים מסוימים מופיע המקדם $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ לפני סימן האינטגרל בשתי הנוסחאות. ההבדלים האלה הם טכניים לגמרי, וכל מה שחשוב הוא שהביטוי $e^{-i\omega x}$ יופיע באחת משתי הנוסחאות, והביטוי $e^{i\omega x}$ יופיע בנוסחה השנייה. מכפלת המקדמים שלפני סימן האינטגרל שבשתי הנוסחאות צריך להיות $\frac{1}{2\pi}$.

משפט 3.3: (התמרת פוריה הפוכה) **אם $f \in G(\mathbb{R})$ אזי בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$ בה קיימות הנגזרות החד-צדדיות מתקיים השוויון**

$$.\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\, d\omega$$

הוכחה:

$$\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega=\int_{-M}^{M}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\omega y}\,dy\right]e^{i\omega x}\,d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\left[\int_{-M}^{M}e^{-i\omega y}e^{i\omega x}\,d\omega\right]dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\left[\frac{e^{i\omega(x-y)}}{i(x-y)}\Bigg|_{-M}^{M}\right]dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{2\sin M(x-y)}{x-y}\,dy$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{x}^{\infty}\frac{f(y)\sin M(x-y)}{x-y}\,dy+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(y)\sin M(x-y)}{x-y}\,dy$$

נציב $t=y-x$ ונקבל

$$.\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt$$

נוכיח ש־

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt=\frac{f(x+)}{2}$$

ו־

$$.\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt=\frac{f(x-)}{2}$$

נוכיח את השוויון הראשון בלבד. את השוויון השני מוכיחים באותה הצורה, או שניתן לקבלו מן הראשון על ידי הצבה.

נפרק את האינטגרל שבשוויון הראשון לסכום של שני אינטגרלים:

$$.\int_{0}^{\infty}f(x+t)\tfrac{\sin Mt}{t}dt=\int_{0}^{\pi}f(x+t)\tfrac{\sin Mt}{t}dt+\int_{\pi}^{\infty}f(x+t)\tfrac{\sin Mt}{t}dt$$

הבחירה של π בגבולות האינטגרציה היא שרירותית. ניתן להשתמש בכל קבוע חיובי אחר. נגדיר את הפונקציה

$$.g(t)=\begin{cases}\frac{f(x+t)}{t}, & t>\pi\\ 0, & t\le\pi\end{cases}$$

מן העובדה ש־ $f\in G(\mathbb{R})$ נובע שגם $g\in G(\mathbb{R})$. מהוכחת סעיף **3** של משפט **3.1** יוצא ש־

$$.\lim_{M\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\sin Mt\,dt=0$$

כלומר,

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}\,dt = 0\,.$$

לכן נותר לנו רק לטפל בגבול

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt\,.$$

הפונקציה

$$h(t)=\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}$$

גם היא רציפה בקטע $[0,\pi]$ (בנקודה $x=0$ על פי הנחת המשפט) ולכן על ידי שימוש בחלק **3** של משפט **3.1**, נקבל

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin Mt}{t}dt\\
&=\lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\sin Mt\,dt+\frac{1}{\pi}f(x+)\int_{0}^{\pi}\frac{\sin Mt}{t}\,dt\right]\\
&=\frac{1}{\pi}f(x+)\lim_{M\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin Mt}{t}dt
\end{aligned}$$

נשאר לבדוק אם הגבול האחרון קיים ושווה $\frac{\pi}{2}$ ובכך תסתיים הוכחת המשפט. על ידי ההצבה $u=Mt$ נקבל ש-

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\sin Mt}{t}dt=\int_{0}^{M\pi}\frac{\sin u}{u}du$$

ולכן

$$\lim_{M\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin Mt}{t}dt=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$$

בהנחה שהאינטגרל שבאגף ימין מתכנס.

טענה: $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}\,.$

הוכחת הטענה: הפונקציה $\frac{\sin u}{u}$ רציפה בקטע $[0,\infty)$ ולכן בכדי להוכיח את התכנסות האינטגרל יספיק להוכיח שהגבול

$$\lim_{R\to\infty}\int_{a}^{R}\frac{\sin u}{u}du$$

קיים עבור $a>0$ כלשהו. על ידי אינטגרציה לפי חלקים נקבל:

$$\int_{a}^{R}\frac{\sin u}{u}du=-\frac{\cos u}{u}\Big|_{a}^{R}-\int_{a}^{R}\frac{\cos u}{u^2}du\,.$$

ברור ש־

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\cos R}{R}=0$$

וש־

$$\left|\frac{\cos u}{u^2}\right|\le\frac{1}{u^2}\,.$$

הפונקציה $\frac{1}{u^2}$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a,\infty)$, לכל $a>0$, ולכן האינטגרל שלנו מתכנס.
בגלל שהאינטגרל מתכנס ניתן לקבל את ערכו על ידי כל גבול מן הצורה

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{R_m}\frac{\sin u}{u}du$$

כאשר $\{R_m\}_{m=1}^{\infty}$ היא סדרה כלשהיא השואפת לאינסוף. נקח את $R_m=(m+\frac{1}{2})\pi$, כאשר m הוא מספר טבעי, ונקבל

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\lim_{m\to\infty}\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}du\,.$$

על ידי ההצבה $t=\frac{u}{m+\frac{1}{2}}$ נקבל

$$\int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}du=\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{t}dt\,.$$

מהוכחת משפט דיריכלה (ראה הוכחת משפט **2.5**)

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{t}dt&=\lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{2\sin\frac{1}{2}t}{t}\cdot\frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt\\&=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{2\sin\frac{1}{2}t}{t}\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

■

תוצאה מיידית ממשפט **3.3** היא: אם $f\in G(\mathbb{R})$, f רציפה, ו־ f' רציפה למקוטעין, אזי מתקיימות שתי הנוסחאות הבאות:

$$\mathfrak{F}[f](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$f(x)=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathfrak{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega\,.$$

אם נניח שגם $\mathcal{F}[f] \in G(\mathbb{R})$ אזי

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[f](\omega)\big](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega(-x)}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}f(-x)\end{aligned}$$

כלומר, תחת התנאים הנ"ל על f ועל $\mathcal{F}[f]$, קבלנו את הנוסחה הבאה:

$$.\mathcal{F}\big[\mathcal{F}[f]\big](x) = \frac{1}{2\pi}f(-x)$$

דוגמא 3.4: בדוגמא **3.1** ראינו שההתמרת פוריה של $f(x) = e^{-|x|}$ היא

$$.F(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

ברור כי שתי הפונקציות האלה נמצאות במרחב $G(\mathbb{R})$, רציפות, וגזירות ברציפות. לכן מנוסחת ההתמרה ההפוכה נקבל כי

$$\begin{aligned}e^{-|x|} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}[\cos\omega x + i\sin\omega x]\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega x}{\pi(1+\omega^2)}\,d\omega + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega x}{\pi(1+\omega^2)}\,d\omega\end{aligned}$$

החלק המדומה מתאפס בגלל ש- $e^{-|x|}$ היא פונקציה ממשית (או בגלל ש- $\frac{\sin\omega x}{\pi(1+\omega^2)}$ היא פונקציה אי-זוגית). לכן נקבל את הנוסחה

$$.\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega = e^{-|x|}$$

דוגמא 3.5: בדוגמא **3.2** ראינו כי ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -b \le x \le b \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

היא
$$.F(\omega) = \frac{\sin \omega b}{\omega \pi}$$
מנוסחת ההתמרה ההפוכה נקבל שלכל $|x| \neq b$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin \omega b}{\omega\pi} e^{i\omega x}\, d\omega \\ &= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega\pi}\, d\omega + \lim_{M\to\infty} i \int_{-M}^{M} \frac{\sin \omega b \sin \omega x}{\omega\pi}\, d\omega \\ &= \lim_{M\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{M} \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega}\, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega}\, d\omega \end{aligned}$$
בנקודות $x = \pm b$, f אינה רציפה ולכן, לפי משפט **3.3**, הערך של האינטגרל בנקודות אלה שווה לממוצע של הגבולות החד-צדדים, השווה ל- $\frac{1}{2}$ בשתי הנקודות. לכן נקבל את הנוסחה
$$.\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} 1, & |x| < b \\ \frac{1}{2}, & |x| = b \\ 0, & |x| > b \end{cases}$$
אם נבחר למשל $x = 0$ אז נקבל את הנוסחה
$$.\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega b}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

נעבור עכשיו להצגת נוסחת פלנשראל בשתי צורותיה השונות. נוסחה זו מקבילה לשוויון פרסבל עבור טורי פוריה. לא נוכל לתת לה הוכחה מדויקת במסגרת ספר זה, אך ננסה להסביר מדוע היא נכונה.

נוסחת פלנשראל (Plancherel): אם $f \in G(\mathbb{R})$ ו- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty$ אזי
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}[f](\omega)|^2\, d\omega < \infty$$
ובנוסף לכך
$$.\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}[f](\omega)|^2\, d\omega$$

נוסחה זו נקראת לפעמים גם **נוסחת שימור אנרגיה**, והיא למעשה מקרה פרטי של הנוסחה הבאה.

נוסחת פלנשראל מוכללת: אם $f, g \in G(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 < \infty$, ו- $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 < \infty$, אזי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\,\overline{\mathcal{F}[g](\omega)}\,d\omega.$$

אם נקח $g = f$ אז נקבל את הנוסחה הקודמת כמקרה פרטי. נכונות הנוסחה תוצדק על ידי ההסבר החלקי הבא:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\,\overline{\mathcal{F}[g](\omega)}\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\left(\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}\,dx}\right)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\overline{g(x)}e^{i\omega x}\,dx\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}\,d\omega\right)\overline{g(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx
\end{aligned}$$

דוגמא 3.6: תהי $f(x) = e^{-|x|}$. על סמך דוגמא **3.1**, $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$, ולכן מנוסחת פלנשראל נקבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-|x|}\right)^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}\right]^2 d\omega.$$

מכיוון ש- $\left(e^{-|x|}\right)^2 = e^{-2|x|}$ ו-

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2\pi}$$

הרי ש-

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}\,d\omega = \frac{\pi}{4}.$$

דוגמא 3.7: לכל קבוע ממשי $b > 0$, תהי

$$f_b(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le b \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

על סמך דוגמא **3.2**

$$\mathcal{F}[f_b](\omega) = \frac{\sin \omega b}{\omega\pi}.$$

נבחר שני קבועים $0 < a < b$. אזי מנוסחת פלנשראל המוכללת נקבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)f_b(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f_a](\omega)\overline{\mathcal{F}[f_b](\omega)}\,d\omega.$$

את האינטגרל הראשון קל לחשב:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)f_b(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} dx = \frac{a}{\pi}.$$

כמו-כן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f_a](\omega)\overline{\mathcal{F}[f_b](\omega)}\,d\omega = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\omega \sin b\omega}{\omega^2}\,d\omega.$$

לכן, לכל $a, b > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\omega \sin b\omega}{\omega^2}\,d\omega = \pi \min(a, b).$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת פוריה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ ב. $f(x) = \frac{\cos ax}{a^2+x^2}$ ג. $f(x) = \frac{\sin bx}{a^2+x^2}$

2. על ידי שימוש בתוצאות של תרגילים קודמים, חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ ב. $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$

ג. $\int_0^\infty \left[\frac{\sin u - u\cos u}{u^2}\right]^2 du$ ד. $\int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+1)^2}\,du$

ה. $\int_0^\infty \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du$ ו. $\int_0^\infty \frac{x\sin \pi x}{1-x^2}\,dx$

ז. $\int_0^\infty \frac{x\sin \pi x \cos \pi x}{1-x^2}\,dx$ ח. $\int_0^\infty \left(\frac{x\sin \pi x}{1-x^2}\right)^2 dx$

3. על ידי שימוש בהתמרת פוריה של

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le a \\ -1, & -a \le x \le 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \qquad (a > 0)$$

חשב את האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - 1}{x}\sin bx\,dx, \qquad b > 0.$$

4. חשב את האינטגרל
$$.\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}, \qquad a,b>0$$

5. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ותהי F ההתמרת פוריה של f. ידוע כי
$$F(\omega) = \begin{cases} 1-\omega^2, & |\omega| \le 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$
מצא את f.

6. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ פונקציה אי-זוגית, רציפה, ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$. ידוע כי
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \begin{cases} 1-\omega, & |\omega| \le 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$
מצא את f.

5. קונבולוציה

יהיו f ו־ g שתי פונקציות נתונות. קיימות פעולות שונות, אותן אנו מכירים, בין f ו־ g כמו $f+g$, $f\cdot g$, או $f\circ g$ (הרכבה). בסעיף זה נגדיר פעולה חדשה בין שתי פונקציות, שהיא בעלת חשיבות רבה לנושא של התמרות אינטגרליות. הפעולה נקראת **קונבולוציה** (convolution) והיא מסומנת על ידי $f*g$. יהיו f ו־ g פונקציות אשר תחום ההגדרה שלהם הוא $\mathbb{R}$. לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר
$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$
בתנאי שהאינטגרל קיים. על ידי הצבה ניתן לבדוק בקלות ש־
$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$
ולכן נקבל ש־
$$.f*g = g*f$$
כלומר פעולת הקונבולוציה היא פעולה קומוטטיבית. ישנן עוד כמה תכונות יסודיות לפעולת הקונבולוציה שנזכיר בהמשך, על פי מידת הצורך. אחת מהן היא:

טענה 3.4: אם f ו־ g אינטגרביליות ואינטגרבילות בהחלט מעל $\mathbb{R}$, אזי הקונבולוציה $f*g$ קיימת והיא אינטגרבילית בהחלט.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy\right|dx\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|\cdot|g(y)|\,dy\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|\,dx\right]\cdot|g(y)|\,dy\end{aligned}$$

נתון כי f אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ולכן על ידי הצבה נקבל ש־

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx < \infty$$

כאשר ערך האינטגרל אינו תלוי ב־ y. לכן

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|\,dx &\le \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\right]|g(y)|\,dy\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\,dy\right) < \infty\end{aligned}$$

■

החשיבות של פעולת הקונבולוציה מתבטאת בנוסחה הבאה.

משפט 3.5: (משפט הקונבולוציה) **לכל** $f,g\in G(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}[f*g](\omega) = 2\pi\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega).$$

הוכחה: מהנתון $f,g\in G(\mathbb{R})$ נובע כי $f*g$ אינטגרבילית בהחלט. זה לא תמיד נכון ש־ $f*g$ רציפה למקוטעין, אך למרות זאת ניתן לבצע את הפעולות הבאות:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f*g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}g(y)e^{-i\omega y}\,dx\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}\,dx\right)g(y)e^{-i\omega y}\,dy\end{aligned}$$

קל לבדוק (על ידי הצבה) כי

$$.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}\,dx = \mathfrak{F}[f](\omega)$$

למעשה, האינטגרל באגף שמאל אינו תלוי במשתנה y. לכן

$$.\mathfrak{F}[f*g](\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}\,dy = \mathfrak{F}[f](\omega)\cdot 2\pi\cdot\mathfrak{F}[g](\omega) \quad \blacksquare$$

משפט **3.5** מציג את החשיבות של פעולת הקונבולוציה עבורנו, אך נשתמש בו בדרך כלל בצורה עקיפה. לרוב, נתונה לנו הפונקציה $\mathfrak{F}[f](\omega)\cdot\mathfrak{F}[g](\omega)$, כאשר הפונקציות f ו־g ידועות. המטרה היא למצוא פונקציה h כך ש־$\mathfrak{F}[h](\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega)\cdot\mathfrak{F}[g](\omega)$. במילים אחרות, אנו מעוניינים למצוא את ההתמרה ההפוכה של $\mathfrak{F}[f](\omega)\cdot\mathfrak{F}[g](\omega)$. ממשפט **3.5** אנו למדים כי אכן $h(x) = \frac{1}{2\pi}(f*g)(x)$.

תרגילים

1. על ידי שימוש בהתמרת פוריה, פתור את המשוואות האינטגרליות הבאות:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt = e^{-\frac{x^2}{2}}$

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+a^2}\,dt = \frac{1}{x^2+b^2}, \qquad (0<a<b)$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt = \frac{1}{x^2+1}$

ד. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}f(t)\,dt = e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}$

2. לכל $a>0$ נגדיר את הפונקציות:

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & |x|<a \\ 0, & |x|\ge a \end{cases} \qquad g_a(x) = \begin{cases} 1-\frac{|x|}{a}, & |x|<a \\ 0, & |x|\ge a \end{cases}$$

חשב את f_a*f_a ואת g_a*g_a.

3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ותהי F ההתמרת פוריה של f. ידוע כי

$$F(\omega)+\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-s)e^{-|s|}ds = \begin{cases} \omega^2, & 0\le\omega\le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא את f.

4. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ואינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}$, ותהי F ההתמרת פוריה של f. הראה שאם $F(\omega)=0$ לכל $\omega>\omega_0$ אזי לכל $a>\omega_0$

$$f(x)*\frac{\sin ax}{\pi x}=f(x).$$

5. תהי F ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

מצא פונקציה g כך שההתמרת פוריה G של g מקיימת $G(\omega)=[F(\omega)]^2$.

6. שימושים למשוואות דיפרנציאליות חלקיות

בסעיף זה נדגים את השימוש בהתמרת פוריה בפתרון כמה בעיות קלאסיות בתחום המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות. אנו יוצאים מן ההנחה כי הקורא מתמצא בתחום זה או שהוא לומד אותו במקביל, ולכן לא נכנס לכל פרטי הפרטים הנוגעים לו.

משוואת החום

משוואת החום ההומוגנית החד-מימדית על כל הציר הממשי נתונה על ידי המשוואה

$$u_t-ku_{xx}=0 \qquad (-\infty<x<\infty,\quad 0<t<\infty)$$

כאשר u היא פונקציה של המשתנים x ו־ t, x היא נקודה על הציר, ו־ t היא נקודה בזמן. ציר המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מייצג מוט אינסופי (משני הצדדים) העשוי מחומר אחיד בעל צפיפות אחידה. מניחים כי המוט מבודד לגמרי, ולכן אין כניסה או יציאה של חום מן המוט החוצה. הערך $u(x,t)$ הוא הטמפרטורה בנקודה x על המוט בזמן t. k הוא קבוע פיזיקאלי חיובי התלוי בסוג ובצפיפות החומר ממנו עשוי המוט. המשוואה היא מודל מתמטי פשוט לתופעת ההתפשטות של החום לאורך המוט במשך הזמן. בכדי לקבוע פתרון מסוים יש לדעת את מצב הטמפרטורה על כל נקודה של המוט בזמן מסוים. לכן נניח שנתון לנו תנאי התחלה מן הצורה

$$u(x,0)=f(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

כאשר $f\in G(\mathbb{R})$. הנחה זו שקולה לעובדה שכמות החום האצורה במוט היא סופית ושהתפלגות הטמפרטורות על המוט היא רציפה למקוטעין. נדרוש שתנאי זה יתקיים גם עבור u, u_x, u_t, ו־ u_{xx} (כל אחד מהם מגדיר פונקציה של x אם קובעים את t).

הרעיון הכללי לפתרון הבעייה הוא שבמקום לנסות למצוא את u באופן ישיר, יהיה יותר קל למצוא את ההתמרת פוריה של u שנסמנה על ידי U (ההתמרה ביחס למשתנה x כמובן, למשתנה t נתייחס כאל פרמטר). הסיבה לכך היא שכשמפעילים את התמרת פוריה על u_x הנגזרת החלקית תעלם (ראה נוסחת הנגזרת **3.7**). במקרה שלנו, הפעלת התמרת פוריה על משוואת החום תביא אותנו למשוואה רגילה מסדר ראשון עבור U. המחיר שנשלם מתבטא בכך שמקדמי המשוואה הרגילה אינם קבועים. בשלב השני נשתמש בנוסחת ההתמרה ההפוכה בכדי לקבל את u, ובכך יסתיים פתרון הבעייה.

נגדיר

$$U(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx.$$

כלומר, $U(\omega,t)$ היא ההתמרת פוריה של $u(x,t)$ ביחס למשתנה x. נגזור את U לפי t:

$$U_t(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,t)e^{-i\omega x}\,dx.$$

מאחר ו־ $u_t=ku_{xx}$, נוכל לרשום

$$U_t(\omega,t)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}(x,t)e^{-i\omega x}\,dx.$$

מנוסחת הנגזרת של התמרת פוריה (נוסחה **3.7**) נקבל שכל פונקציה $g\in G(\mathbb{R})$ שגזירה פעמיים מתקיים

$$\mathfrak{F}[g''](\omega)=-\omega^2\mathfrak{F}[g](\omega)$$

ולכן

$$U_t(\omega,t)=k\mathfrak{F}[u_{xx}](\omega,t)=-k\omega^2U(\omega,t).$$

קבלנו משוואה רגילה מאוד פשוטה:

$$U_t+k\omega^2U=0$$

שבה מופיעה רק נגזרת ביחס למשתנה t. קל למצוא שהפתרון הכללי למשוואה זו הוא

$$U(\omega,t)=A(\omega)e^{-k\omega^2t}$$

כאשר $A(\omega)$ היא פונקציה שרירותית של ω. בכדי לקבוע את $A(\omega)$ נשתמש בתנאי ההתחלה על u:

$$A(\omega)=U(\omega,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

לכן

$$A(\omega) = F(\omega)$$

כאשר F היא ההתמרת פוריה של f (שנתונה לנו). מצאנו אם כן כי

$$U(\omega, t) = F(\omega)e^{-k\omega^2 t}.$$

נותר לנו למצוא את ההתמרה ההפוכה של U בכדי לקבל את הפתרון u של משוואת החום. ידוע לנו ש־ F היא ההתמרת פוריה של f, ולכן אם נוכל למצוא פונקציה p אשר ההתמרת פוריה שלה ביחס למשתנה x היא $e^{-k\omega^2 t}$ אז נוכל להשתמש במשפט הקונבולוציה **3.5** בכדי לקבל את u.

בדוגמא **3.3** מצאנו כי ההתמרת פוריה של $g(x) = e^{-x^2}$ היא $\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$. בנוסף לכך יש לנו גם את נוסחת ההזזה **3.4**: אם $h(x) = cg(ax)$, כאשר $a \neq 0$ אזי

$$\mathcal{F}[h](\omega) = \tfrac{c}{|a|}\mathcal{F}[g](\tfrac{\omega}{a}).$$

במקרה של $g(x) = e^{-x^2}$ נקבל

$$\mathcal{F}[h](\omega) = \frac{c}{2\sqrt{\pi}|a|}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}.$$

אנו מעוניינים בקבועים a ו־ c כך ש־

$$\frac{c}{2\sqrt{\pi}|a|}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} = e^{-k\omega^2 t}.$$

משוויון זה יוצא בקלות ש־ $a = \frac{1}{2\sqrt{kt}}$ ו־ $c = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}$. לכן אם נקח

$$p(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

אז

$$P(\omega, t) = \mathcal{F}[p](\omega, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)e^{-i\omega x}\,dx = e^{-k\omega^2 t}.$$

לבסוף, ממשפט **3.5** נקבל

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}(f * p)(x,t)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(x-y,t)\,dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt^2}}\,dy
\end{aligned}$$

וקבלנו את הצורה הסופית של הפתרון למשוואת החום. הפונקציה $e^{-\frac{x^2}{4kt^2}}$ נקראת לפעמים **הגרעין של משוואת החום** או **גרעין גאוס**. יש לשים לב לעובדה שבשום שלב לא היינו זקוקים לחשב את F, וזה לא מופיע גם בצורה הסופית של הפתרון. ההתמרת פוריה של f או של u לא היתה אלא מכשיר שבאמצעותו הגענו לפתרון.

משוואת לפלס על חצי מישור

עכשיו ננסה לפתור את משוואת לפלס על חצי המישור העליון. כלומר,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < y).$$

מטרתנו היא למצוא פתרון $u(x,y)$ המוגדר ורציף לכל x ולכל $y \geq 0$, והמקיים את תנאי השפה

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

כאשר f היא פונקציה נתונה מראש. תנאי זה אינו מספיק בכדי לקבוע פתרון יחיד ולכן במהלך הדיון נציין עוד תנאי נוסף. כמו במשוואת החום, נגדיר

$$U(\omega,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-i\omega x}\,dx$$

ו־

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = U(\omega,0).$$

נגזור את שני האגפים של המשוואה הראשונה פעמיים לפי y:

$$U_{yy}(\omega,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_{yy}(x,y)e^{-i\omega x}\,dx.$$

ממשוואת לפלס נובע כי $u_{yy} = -u_{xx}$, ולכן

$$U_{yy}(\omega,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,y)e^{-i\omega x}\,dx.$$

עכשיו נשתמש פעמיים בנוסחת הנגזרת של התמרת פוריה ונקבל:

$$U_{yy}(\omega,y) = \omega^2 U(\omega,y).$$

כלומר, עברנו מן המשוואה הדיפרנציאלית החלקית $u_{xx} + u_{yy} = 0$ למשוואה חדשה, אשר בה כל הנגזרות הן לפי המשתנה y בלבד:

$$U_{yy} - \omega^2 U = 0.$$

תנאי ההתחלה $u(x,0)=f(x)$ הופך לתנאי התחלה חדש: $U(\omega,0)=F(\omega)$.

קל לבדוק שהפתרון הכללי של המשוואה החדשה הוא

$$U(\omega,y)=A(\omega)e^{\omega y}+B(\omega)e^{-\omega y}$$

כאשר A ו־ B הן פונקציות שרירותיות של ω. נציב $y=0$ בפתרון הכללי ונקבל

$$F(\omega)=A(\omega)+B(\omega).$$

ברור כי שוויון זה אינו מספיק בכדי לקבוע את A ואת B באופן יחיד. בכדי שיתקיים פתרון יחיד u וגם בכדי להצדיק את השימוש שעשינו בנוסחאות השונות בנוגע להתמרת פוריה (יש לזכור שהתמרת פוריה אינה קיימת עבור כל פונקציה ושהשימוש בנוסחאות השונות הנוגעות לה מותנה בתנאים מסוימים) עלינו לדרוש ש־ u תשאף לאפס במידה שווה במשתנה y כאשר $|x|$ שואף לאינסוף. מסיבות שונות שלא נפרט כאן, דרישה זו מובילה לדרישה הבאה:

$$\omega>0 \Longrightarrow A(\omega)=0$$
$$\omega<0 \Longrightarrow B(\omega)=0.$$

זהו התנאי הנוסף שהזכרנו קודם לכן. ממנו נובע כי

$$A(\omega)=\begin{cases}0, & \omega>0\\ F(\omega), & \omega\le 0\end{cases} \qquad B(\omega)=\begin{cases}F(\omega), & \omega\ge 0\\ 0, & \omega<0\end{cases}$$

ולכן

$$U(\omega,y)=\begin{cases}F(\omega)e^{-\omega y}, & \omega>0\\ F(\omega)e^{\omega y}, & \omega<0\end{cases}$$
$$=F(\omega)e^{-|\omega|y}$$

כמו במקרה של משוואת החום, גם כאן קבלנו את ההתמרה של הפתרון u בצורת מכפלה של שתי פונקציות של ω. פונקציה אחת F היא ההתמרת פוריה של הפונקציה הנתונה f. הפונקציה השנייה היא $e^{-|\omega|y}$. אם נמצא פונקציה p אשר ההתמרה שלה ביחס ל־ x שווה ל־ $e^{-|\omega|y}$ אז ממשפט הקונבולוציה נקבל ש־

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)p(x-t,y)\,dt.$$

מדוגמא **3.1** נזכור כי ההתמרת פוריה של $e^{-|x|}$ היא $\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$, ולכן על פי משפט ההתמרה ההפוכה (ראה דוגמא **3.4**)

$$e^{-|x|}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}e^{i\omega x}\,d\omega.$$

אם נציב $-x$ במקום x נקבל מייד

$$.e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} e^{-i\omega x}\, d\omega$$

על ידי החלפת התפקידים של x ו־ ω נקבל

$$e^{-|\omega|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2} e^{-i\omega x}\, dx$$

ולכן, אם $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$ אזי $\mathcal{F}[g](\omega) = e^{-|w|}$. מנוסחת ההזזה **3.4** אנו יודעים שאם $h(x) = c{\cdot}g(ax)$, כאשר $a \neq 0$, אזי

$$.\mathcal{F}[h](\omega) = \frac{c}{|a|} g(\tfrac{\omega}{a}) = \frac{c}{|a|} e^{-\left|\frac{\omega}{a}\right|}$$

אנו מעוניינים בקבועים a ו־ c כך ש־

$$\frac{c}{|a|} e^{-\left|\frac{\omega}{a}\right|} = e^{-|\omega| y}$$

ולכן $a = c = \frac{1}{y}$. נזכור כי $y > 0$, ומכאן

$$.p(x,y) = c{\cdot}g(ax) = c\frac{2}{1+a^2x^2} = \frac{1}{y}{\cdot}\frac{2}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

לבסוף, צורת הפתרון הפרטי תהיה

$$.u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\, dt$$

ניתן לבדוק (על ידי הצבה במשוואה) כי זהו אכן פתרון למשוואת לפלס, אם כי בדיקה זו אינה קלה במיוחד. פתרון זה נקרא לפעמים **נוסחת פואסון** (Poisson) בחצי המישור $y > 0$.

7. שימושים לעיבוד אותות

פונקציה f נקראת **חסומה בזמן** (time-limited) אם קיים M כך ש־ $f(x) = 0$ לכל $|x| \geq M$. פונקציה $f \in G(\mathbb{R})$ נקראת **חסומה בתדר** (band-limited) אם קיים L כך ש־ $\mathcal{F}[f](\omega) = 0$ לכל $|\omega| \geq L$. עובדה מעניינת היא שלא קיימת פונקציה $f \in G(\mathbb{R})$ בעלת אנרגיה סופית, כלומר, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty$, שהיא חסומה גם בזמן וגם בתדר.

בסעיף זה נדון בשתי בעיות הנוגעות לפונקציות חסומות בתדר.

מסנן low-pass

תהי $f \in G(\mathbb{R})$, תהי F ההתמרת פוריה של f, ויהי $L > 0$ קבוע ממשי נתון. נגדיר את הפונקציה

$$.F_L(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & |\omega| \le L \\ 0, & |\omega| > L \end{cases}$$

אומרים כי הפונקציה F_L מתקבלת על ידי העברת הפונקציה F דרך מסנן low-pass. נשאלת השאלה האם קיימת פונקציה f_L כך ש־ $\mathcal{F}[f_L] = F_L$ ומהי? במילים אחרות: מהי הפונקציה שיש לה אותה התמרת פוריה כמו f בקטע $[-L, L]$ אך היא חסומה בתדר על ידי L. בכדי לענות על השאלה נגדיר

$$.G_L(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le L \\ 0, & |\omega| > L \end{cases}$$

אזי ניתן לרשום

$$.F_L(\omega) = F(\omega)G_L(\omega)$$

לכן נוכל לקבל את f_L באמצעות משפט הקונבולוציה (משפט **3.5**), אם נדע מהן הפונקציות אשר ההתמרות פוריה שלהן הן F ו־ G_L. הפונקציה הראשונה f נתונה לנו. בדוגמא **3.5** הראינו שלכל $|x| \ne L$ מתקיים

$$.G_L(x) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin \omega L}{\omega \pi} e^{i\omega x}\, d\omega$$

מאחר ו־ G_L היא פונקציה זוגית נוכל גם לרשום

$$.G_L(x) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin \omega L}{\omega \pi} e^{-i\omega x}\, d\omega$$

כמו בסעיף הקודם, נחליף את התפקידים של x ו־ ω ונקבל

$$.G_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{2\sin Lx}{x} e^{-i\omega x}\, dx$$

לכן אם נקח $g_L(x) = \frac{2\sin Lx}{x}$ אז $\mathcal{F}[g_L](\omega) = G_L(\omega)$ במובן מסוים (שהוא מספיק חזק בכדי לקבל את התוצאה). ממשפט הקונבולוציה נקבל

$$.f_L = \frac{1}{2\pi}(f * g_L)$$

כלומר,

$$f_L(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{2\sin[L(x-y)]}{x-y}\,dy$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)\sin[L(x-y)]}{x-y}\,dy$$

מנוסחה זו יוצא מייד שאם $f \in G(\mathbb{R})$ ו־ $\mathfrak{F}[f](\omega) = 0$, לכל $L \geq |\omega|$, אזי

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)\sin[L(x-y)]}{x-y}\,dy.$$

הנוסחה הזו היא אחד האיפיונים של הפונקציות החסומות בתדר שקטן או שווה ל־ L.

משפט הדגימה של שנון (Shannon)

משפט הדגימה של שנון מספק לנו דרך פשוטה לחישוב פונקציה החסומה בתדר קטן או שווה ל־ L. זהו משפט מרכזי בתחום רשתות תקשורת ובתחום עבוד אותות.

משפט 3.6: (משפט הדגימה של שנון, Shannon Sampling Theorem)
אם $f \in G(\mathbb{R})$ ו־ $\mathfrak{F}[f](\omega) = 0$, לכל $L \geq |\omega|$, אזי

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L})\frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi}.$$

הוכחה: נסמן $F(\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega)$. ממשפט ההתמרה ההפוכה **3.3** (הניתן ליישום כלפי הפונקציה הנתונה),

$$f(x) = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \int_{-L}^{L} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

ולכן

$$f(\tfrac{n\pi}{L}) = \int_{-L}^{L} F(\omega)e^{\frac{i\omega n\pi}{L}}\,d\omega, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

נרשום את הטור פוריה המרוכב של F בקטע $[-L, L]$ (ראה סעיף **2.3**)

$$F(\omega) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}, \qquad |\omega| \leq L$$

כאשר

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(\omega)e^{\frac{in\pi\omega}{L}}\,d\omega = \frac{1}{2L}f(\tfrac{n\pi}{L}), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

נגדיר

$$.F_L(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi\omega}{L}} = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L}) e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}$$

אזי F_L היא פונקציה מחזורית $2L$ "השווה" ל- F בקטע $[-L,L]$. (כזכור, הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}$ אינו תמיד שווה ל- $F(\omega)$ בכל נקודה $-L \le \omega \le L$.) הפונקציה F מתאפסת מחוץ לקטע $[-L,L]$, ולכן נוכל לרשום

$$F(\omega) \text{ “=” } F_L(\omega) G_L(\omega)$$

כאשר

$$.G_L(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le L \\ 0, & |\omega| > L \end{cases}$$

אזי

$$.F(\omega) \text{ “=” } \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L}) e^{-\frac{in\pi\omega}{L}} G_L(\omega)$$

לפני מספר עמודים הוכחנו כי G_L היא ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$.g_L(x) = \frac{2\sin Lx}{x}$$

מנוסחת ההזזה **3.4** נקבל ש- $e^{-\frac{in\pi\omega}{L}} G_L(\omega)$ היא ההתמרת פוריה של הפונקציה

$$.g_{L,n}(x) = \frac{2\sin(Lx - n\pi)}{x - \frac{n\pi}{L}}$$

לכן

$$.F(\omega) \text{ “=” } \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L}) \mathfrak{F}[g_{L,n}](\omega)$$

כאשר נקח התמרה הפוכה של שני האגפים, נקבל

$$f(x) = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L}) g_{L,n}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L}) \frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi}$$

■

הערות:

1. הוכחת משפט **3.6** קצת חסרה בשלבים בהן עברנו להתמרת פוריה ובחזרה. הוכחת כל הפרטים הנוגעים לשלבים אלה היא טכנית ואינה מוסיפה הבנה. רצוי לציין שכל פונקציה $f \in G(\mathbb{R})$ שהיא חסומה בתדר היא גם רציפה ולמעשה היא אנליטית בכל $\mathbb{R}$.

2. החשיבות של משפט הדגימה של שנון מתבטא בכך שמשתמע ממנו כי פונקציות החסומות תדר קטן או שווה L נקבעות לחלוטין על ידי הערכים שלהם בסדרת נקודות, כך שהמרחק בין כל שתי נקודות סמוכות שווה $\frac{\pi}{L}$. בנוסף לכך, המשפט גם נותן לנו נוסחה מדויקת לחשב את f בכל נקודה x, באמצעות הערכים של f על הסדרה בלבד.

3. הפונקציה $\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}$ שווה 1 כאשר $x = \frac{n\pi}{L}$ (זוהי נקודת אי-רציפות סליקה), ומתאפסת בכל נקודה $x = \frac{k\pi}{L}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq n$. לכן, לכל $n \in \mathbb{Z}$, קיים שוויון פורמלי בין שני האגפים של הנוסחה בנקודות $x = \frac{n\pi}{L}$.

4. אם נקח $f \in G(\mathbb{R})$ ונגדיר

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tfrac{n\pi}{L}) \frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi}$$

אז נקבל פונקציה $g \in G(\mathbb{R})$ החסומה בתדר קטן או שווה ל- L, כך ש- g תהיה שווה ל- f בכל הנקודות $x = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. הפונקציות $\left\{ \frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ מהוות מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \frac{L}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx \,.$$

תרגילים לחזרה כללית

1. חשב את ההתמרת פוריה של

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

והראה כי

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \right) \cos \frac{x}{2}\, dx = \frac{3\pi}{16} \,.$$

2. לכל $x > 0$ נגדיר $f(x) = e^{-x}\cos x$. תהי $\tilde{f}$ ההמשכה האי-זוגית של f. הוכח שלכל $x \neq 0$,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^3 \sin xt}{t^4 + 4}\, dt = \tilde{f}(x) .$$

3. תהי

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

א. חשב את ההתמרת פוריה $F(\omega)$ של $f(x)$.

ב. חשב את $f*f$ ואת $(f*f)*(f*f)$.

ג. חשב את $\mathcal{F}[(f*f)*(f*f)]$.

ד. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^4}\,dx$.

.4 תהי

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

א. חשב את $f*f$.

ב. חשב את האינטגרלים $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ ו־ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$.

.5 לכל $a>0$, תהי $f_a(x)=e^{-a|x|}$, ותהי $g_a(x)=\frac{2a}{x^2+a^2}$.

א. חשב את ההתמרת פוריה של f_a.

ב. חשב את ההתמרת פוריה של g_a.

ג. האם קיימת פונקציה $\varphi(t)$ ב־ $G(\mathbb{R})$ כך ש־ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^2+16}dt=\frac{1}{x^2+49}$? אם כן, מצא את $\varphi(t)$, אם לא, נמק מדוע לא קיימת $\varphi(t)$.

ד. האם קיימת פונקציה $\varphi(t)$ ב־ $G(\mathbb{R})$ כך ש־ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^2+49}dt=\frac{1}{x^2+16}$? אם כן, מצא את $\varphi(t)$, אם לא, נמק מדוע לא קיימת $\varphi(t)$.

.6 תהי $f\in C(\mathbb{R}^n)$ אינטגרבילית בהחלט מעל $\mathbb{R}^n$. לכל ω_1, ω_2, ..., ו־ ω_n ממשיים נגדיר

$$\mathcal{F}[f](\omega_1,\ldots,\omega_n)=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{פעמים } n} f(x_1,\ldots,x_n)e^{-i(\omega_1x_1+\cdots\omega_nx_n)}\,dx_1\,\cdots\,dx_n$$

הפונקציה $\mathcal{F}[f]$ (המוגדרת על $\mathbb{R}^n$) נקראת **ההתמרת פוריה הרב מימדית של** f.
הראה שאם f_1, f_2, ..., ו־ f_n הן פונקציות רציפות של משתנה יחיד השייכות ל־ $G(\mathbb{R})$, ואם

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$$

אזי

$$\mathcal{F}[f](\omega_1,\ldots,\omega_n)=\mathcal{F}[f_1](\omega_1)\mathcal{F}[f_2](\omega_2)\cdots\mathcal{F}[f_n](\omega_n).$$