פרק 4
התמרת לפלס

0. הקדמה

התמרת לפלס שימושית במתמטיקה וביישומיה השונים. ההיסטוריה וההתפתחות של התמרת לפלס קשורה באופן הדוק לפתרון משוואות דיפרנציאליות. לתאוריה של התמרת לפלס היסטוריה ארוכה בה היו מעורבים מתמטיקאים כמו אוילר, לגרנז', לפלס, פואנקרה, ודויטש אשר תרמו להתפתחותה בצורה משמעותית. פרק זה הוא מבוא לתאוריה ולשימושים של התמרת לפלס. בסעיפים **1**, **2**, **3**, **5**, **7** ו־**8** מוצגת התאוריה הבסיסית וכמה מן השימושים הנפוצים שלה. בסעיף 4 אנו דנים בשתי "פונקציות" חשובות וכמה משימושיהם בהקשר להתמרת לפלס. בסעיף **6** ליקטנו מספר דוגמאות נוספות. מוצגים שם גם שימושים של התמרת לפלס לחישוב אינטגרלים.

1. הגדרה ודוגמאות

תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$ המקבלת ערכים ב־$\mathbb{C}$. לכל מספר ממשי s נגדיר

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

במידה והאינטגרל מתכנס (קיים). על ידי כך, נקבל פונקציה $\mathcal{L}[f](s)$ הנקראת **התמרת לפלס** (Laplace transform) של f. כפי שנראה בדוגמאות ובמשפטים של פרק זה, ההתמרת לפלס של f בדרך כלל קיימת עבור ערכים מסוימים של s ואינה קיימת עבור ערכים אחרים.

לפעמים רצוי לחשוב ש־f מוגדרת על כל הישר הממשי $(-\infty,\infty)$ אך מתאפסת באופן זהותי בקטע $(-\infty,0)$, למרות שמלכתחילה היא אינה כזאת. במקרים בהן אין זה כך, נוכל

פשוט להרחיב את הגדרת f על ידי הקביעה ש־ $f(t)=0$, לכל $t<0$. הנחה זו מאפשרת לנו להציג קשר פשוט שבין ההתמרת לפלס של f ובין התמרת פוריה של f:

$$\mathfrak{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^\infty e^{-i(-is)t}f(t)\,dt=2\pi\mathfrak{F}[f](-is).$$

רצוי מאוד לזכור שהממשיות של ω בהתמרת פוריה היתה חשובה לנו.

לפני שנרחיב את הדיבור על התמרת לפלס ותכונותיה, נתחיל בהצגת מספר דוגמאות.

דוגמא 4.1: תהי $f(t)=1$, לכל $t\geq 0$. אזי

$$\mathfrak{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{L\to\infty}\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^L=\frac{1}{s},\qquad s>0.$$

עבור $s\leq 0$ האינטגרל אינו מתכנס, ולכן $\mathfrak{L}[f](s)=\frac{1}{s}$ רק עבור $s>0$. בדרך כלל, נדאג לציין את תחום ההגדרה של $\mathfrak{L}[f]$ יחד עם הנוסחה עצמה.

דוגמא 4.2: תהי $f(t)=e^{at}$, $a\in\mathbb{R}$. אזי

$$\mathfrak{L}\left[e^{at}\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{s-a},\qquad s>a$$

דוגמא 4.3: תהי $f(t)=e^{zt}$, כאשר $z=x+iy\in\mathbb{C}$. אזי

$$\mathfrak{L}\left[e^{zt}\right]=\int_0^\infty e^{-st}e^{(x+iy)t}dt=\int_0^\infty e^{-(s-x-iy)t}dt=\frac{1}{s-z},\qquad s>x$$

ברור כי דוגמא **4.2** היא מקרה פרטי של דוגמא זו.

התמרת לפלס היא פעולה ליניארית על קבוצת פונקציות. כלומר,

$$\mathfrak{L}[af+bg](s)=a\mathfrak{L}[f](s)+b\mathfrak{L}[g](s)$$

עבור כל פונקציות f ו־ g (עבורן אגף ימין מוגדר), ועבור כל סקלרים $a,b\in\mathbb{C}$. תכונה זו, של ליניאריות, היא תכונה חשובה ובסיסית.

דוגמא 4.4: תהי $f(t)=\sin at$, $a\in\mathbb{R}$. אפשר לחשב את $\mathfrak{L}[\sin at](s)$ על פי ההגדרה (על ידי שימוש פעמיים באינטגרציה לפי חלקים). אנו נעשה זאת על ידי שימוש בתכונת הליניאריות ובדוגמא הקודמת. ראשית כל נשים לב כי

$$\sin at=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}.$$

לכן

$$.\mathcal{L}[\sin at](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right](s) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{iat}\right](s) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left[e^{-iat}\right](s)$$

מדוגמא **4.3** נקבל

$$.\mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\right] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0$$

דוגמא 4.5: תהי $f(t) = \cos at$, $a \in \mathbb{R}$. כמו בדוגמא הקודמת נוכל לקבל כי

$$.\mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0$$

בכל הדוגמאות מצאנו כי ההתמרת לפלס מוגדרת עבור כל s הגדול ממספר מסוים. כלומר, תחום ההגדרה של $\mathcal{L}[f](s)$ הוא בדרך כלל מן הצורה (c, ∞) או $[c, \infty)$, עבור קבוע מסוים c (שתלוי כמובן ב־ f). הסיבה לכך היא שאם $s_1 < s_2$ אזי $e^{-s_1 t} > e^{-s_2 t} > 0$, לכל $t \geq 0$, ולכן קל יותר לאינטגרל להתכנס. ננסח זאת באופן פורמלי.

משפט 4.1: **תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$ המקבלת ערכים ב־ $\mathbb{C}$. נניח שקיימים קבועים ממשיים a ו־ K כך ש־**

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \qquad t \geq 0$$

אזי $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s > a$.

הוכחה: מההגדרה

$$.\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

הפונקציה $e^{-st}f(t)$ רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$. נוכיח שהיא אינטגרבילית בהחלט בקטע זה, לכל $s > a$

$$.\int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt = \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-st} K e^{at}\, dt = \frac{K}{s - a} \qquad \blacksquare$$

הדוגמאות **4.1-4.5** מעידות על רמת הדיוק של משפט זה.

תרגילים

1. האם קיימת התמרת לפלס עבור הפונקציה $f(t) = e^{t^2}$? אם היא קיימת, מצא אותה, ומצא היכן היא מוגדרת. אם לא, נמק מדוע היא אינה קיימת.

2. מצא את ההתמרת לפלס של $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le 2\pi \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}$.

3. הוכח שאם $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין ומחזורית p ($p > 0$), אזי

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

4. תהי $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה מחזורית 4 כך ש־

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 2 \\ -1, & 2 < t \le 4 \end{cases}.$$

הוכח כי

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{\tanh s}{s}.$$

2. נוסחאות ודוגמאות נוספות

נעבור עכשיו להצגת מספר נוסחאות שימושיות אשר יעזרו לנו בהמשך לחשב את ההתמרת לפלס של פונקציות רבות בצורה יעילה.

משפט 4.2: (נוסחת הנגזרת) **תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$ כך שנגזרתה f' קיימת ורציפה למקוטעין בקטע זה. נניח שקיימים קבועים ממשיים a ו־ K כך ש־**

$$|f(t)| \le Ke^{at}, \qquad t \ge 0.$$

אזי ההתמרת לפלס של f', $\mathcal{L}[f'](s)$, מוגדרת לכל $s > a$, ובנוסף

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f] - f(0)} \tag{4.1}$$

הוכחה: מן הנתונים ברור כי $e^{-st}f'(t)$ רציפה למקוטעין בכל קטע סופי $[0,L]$. יהיו

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < L$$

כל נקודות אי-הרציפות הפנימיות של $e^{-st}f'(t)$ בקטע $[0,L]$. נסמן גם $x_0=0$ ו־ $x_n=L$.
אזי, לכל $1\le i\le n$, $e^{-st}f'(t)$ רציפה בקטע (x_{i-1},x_i), ולכן

$$\begin{aligned}\int_0^L e^{-st}f'(t)\,dt &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-st}f'(t)\,dt\\ &= \sum_{i=1}^n \left[e^{-st}f(t)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + s\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-st}f(t)\,dt\right]\\ &= \sum_{i=1}^n \left[e^{-sx_i}f(x_i)-e^{-sx_{i-1}}f(x_{i-1})\right] + s\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-st}f(t)\,dt\\ &= e^{-sL}f(L)-f(0)+s\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt\end{aligned}$$

על סמך משפט **4.1**, $\mathfrak{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s>a$, וברור כי

$$\mathfrak{L}[f](s)=\lim_{L\to\infty}\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt, \qquad s>a.$$

בנוסף

$$\lim_{L\to\infty}\left|e^{-sL}f(L)\right| \le \lim_{L\to\infty}\left|e^{-sL}Ke^{aL}\right| = K\lim_{L\to\infty}e^{-(s-a)L}=0, \qquad s>a$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f'](s) &= \lim_{L\to\infty}\int_0^L e^{-st}f'(t)\,dt\\ &= \lim_{L\to\infty}\left[e^{-sL}f(L)-f(0)+s\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt\right]\\ &= s\mathfrak{L}[f](s)-f(0)\end{aligned}$$

לכל $s>a$. ∎

ההכללה המיידית של נוסחת הנגזרת נתונה במשפט הבא.

משפט 4.3: **נניח כי f, f', f'', ..., $f^{(n-1)}$ כולן מוגדרות ורציפות בקטע $[0,\infty)$, $f^{(n)}$ קיימת ורציפה למקוטעין בקטע זה, ונניח כי קיימים קבועים ממשיים a ו־ K כך ש־**

$$\left|f^{(j)}(t)\right| \le Ke^{at}, \qquad t\ge 0, \quad j=0,1,2,\ldots,n-1.$$

אזי $\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s)$ קיימת ומוגדרת עבור כל $s > a$ ו־

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)} \tag{4.2}$$

הוכחה: עבור $n = 2$, למשל, נפעיל את משפט **4.2** פעמיים

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0)\\ &= s\left[s\mathcal{L}[f](s) - f(0)\right] - f'(0)\\ &= s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

הוכחה מלאה עבור כל n נובעת משימוש שיגרתי באינדוקציה. ∎

נוסחה דומה, במובן מסוים, לנוסחה האחרונה היא

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \tfrac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)} \tag{4.3}$$

ברור כי נוסחה זו מתקיימת תחת תנאים דומים לאלה שבמשפטים **4.2** ו־**4.3**. נוותר על הניסוח המדויק שלהם. בדרך כלל התנאים הדרושים ברורים מתוך ההוכחה. את הנוסחה יספיק להוכיח עבור $n = 1$ בלבד, מאחר ושאר המקרים נגזרים ממקרה זה בקלות (על ידי הפעלתו n פעמים). עלינו להוכיח כי

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s).$$

הוכחה: נתחיל מן האגף הימני ונגיע לשמאלי:

$$\begin{aligned}-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) &= -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\\ &= -\int_0^\infty -te^{-st}f(t)\,dt\\ &= \int_0^\infty te^{-st}f(t)\,dt\\ &= \mathcal{L}[tf(t)](s)\end{aligned}$$

∎

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a), \qquad a \in \mathbb{R}} \tag{4.4}$$

הוכחה:

$$.\mathfrak{L}\left[e^{at}f(t)\right](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = \mathfrak{L}[f](s-a)$$

■

$$\boxed{\mathfrak{L}[f(at)](s) = \tfrac{1}{a}\mathfrak{L}[f](\tfrac{s}{a}), \qquad a>0} \tag{4.5}$$

הוכחה:

$$\mathfrak{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty e^{-st}f(at)\,dt$$

נציב $x = at$ על מנת לקבל

$$.\mathfrak{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty e^{-s\frac{x}{a}}f(x)\,\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-(\frac{s}{a})x}f(x)\,dx = \frac{1}{a}\mathfrak{L}[f](\frac{s}{a})$$

■

כל הנוסחאות שקבלנו עד עכשיו הן פשוטות אך שימושיות מאוד. על ידי השימוש בהן, ניתן לקבל בצורה פשוטה יותר את כל אחת מן הדוגמאות **4.1**, **4.2**, **4.4**, ו־**4.5**.

דוגמא 4.6: נחשב את ההתמרת לפלס של $f(t) = t^n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, בשתי שיטות.

שיטה 1: על סמך דוגמא **4.1** ונוסחה **(4.3)**,

$$.\mathfrak{L}[t^n\cdot 1](s) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathfrak{L}[1](s) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s}, \qquad s>0$$

קל לבדוק כי

$$\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s} = (-1)^n\frac{n!}{s^{n+1}}$$

ולכן

$$.\mathfrak{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s>0$$

שיטה 2: ברור כי $f^{(n)}(t) = n!$, ולכן מנוסחה **(4.2)** נקבל

$$\begin{aligned}\tfrac{n!}{s} &= \mathfrak{L}[n!](s) = \mathfrak{L}\left[f^{(n)}\right](s)\\ &= s^n\mathfrak{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

מאחר שעבור $f(t) = t^n$ מתקיים

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

נקבל

$$\frac{n!}{s} = s^n \mathfrak{L}[t^n](s)$$

ולכן

$$\mathfrak{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0 .$$

דוגמא 4.7: תהי $f(t) = e^{at}\sin bt$, $a, b \in \mathbb{R}$. נשתמש בנוסחאות **4.4** ו־**4.5** בכדי לחשב את $\mathfrak{L}[f(t)](s)$.

$$\mathfrak{L}\left[e^{at}\sin bt\right](s) = \mathfrak{L}[\sin bt](s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \qquad s > a .$$

דוגמא 4.8: נחשב את ההתמרת לפלס של $f(t) = e^{at}\cos bt$ באותו האופן

$$\mathfrak{L}\left[e^{at}\cos bt\right](s) = \mathfrak{L}[\cos bt](s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \qquad s > a .$$

תהי $F(s)$ פונקציה המוגדרת לכל $x > a$. נוכל לשאול אם קיימת פונקציה $f(t)$ כך ש־ $\mathfrak{L}[f](s) = F(s)$. הפונקציה $f(t)$, אם היא קיימת, נקראת **ההתמרת לפלס ההפובה** של $F(s)$. באופן כללי, התשובה לשאלה זו היא שלילית. התנאים המדויקים שעל $F(s)$ לקיים, בכדי שהיא תהיה התמרת לפלס של פונקציה מסוימת, אינם פשוטים. נסיים את הסעיף הנוכחי בכך שנציין את אחד מן התנאים ההכרחיים:

משפט 4.4: תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0, \infty)$ המקבלת ערכים ב־ $\mathbb{C}$. נניח שקיימים קבועים ממשיים K ו־ a כך ש־

$$|f(t)| \le K e^{at}, \qquad t \ge 0 .$$

אזי

$$\lim_{s\to\infty} \mathfrak{L}[f](s) = 0 .$$

הוכחה: לכל $s > a$,

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{L}[f](s)\right| &= \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \\ &\le \int_0^\infty e^{-st} K e^{at} dt = \frac{K}{s-a} \end{aligned}$$

טבלת התמרות לפלס

	פונקציה	התמרת לפלס
1	1	$\frac{1}{s},\, s > 0$
2	$e^{at},\, a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a},\, s > a$
3	$e^{zt},\, z \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-z},\, s > \mathrm{Re}(z)$
4	$\sin at,\, a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2+a^2},\, s > 0$
5	$\cos at,\, a \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+a^2},\, s > 0$
6	$t^n,\, n \in \mathbb{Z}_+$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\, s > 0$
7	$e^{at}\sin bt,\, a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\, s > a$
8	$e^{at}\cos bt,\, a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\, s > a$
9	$u_c(t),\, c > 0$	$\frac{e^{-cs}}{s},\, s > 0$
10	$t^n e^{at},\, a \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{Z}_+$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\, s > a$
11	$f'(t)$	$s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$
12	$f^{(n)}(t)$	$s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
13	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)$
14	$e^{at}f(t),\, a \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
15	$f(at),\, a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}[f](\frac{s}{a})$

ולכן $\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}[f](s)=0$. ∎

לסיכום, נרכז את הנוסחאות והדוגמאות של סעיף זה והסעיף הקודם בטבלת ההתמרות לפלס, בכדי שנוכל להשתמש בהם בצורה נוחה יותר בהמשך. לפעמים נתייחס לנוסחה בהתאם למספרה בטבלה.

תרגילים

1. חשב את ההתמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $e^{-t}\cos 2t$ ב. $e^{-4t}\cosh 2t$

ג. $(t^2+1)^2$ ד. $3\cosh t - 4\sinh 5t$

ה. $t^n \sin t$

2. חשב את ההתמרת לפלס של $f(t)=\frac{\sin t}{t}$. (רמז: חשב את $\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)$.)

3. חשב את f אם ידוע כי $\mathcal{L}[f](s)=\frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{s^2-a^2}\right]$, $a>0$.

4. הוכח את כל אחת מן הנוסחאות הבאות:

א. $$\mathcal{L}\left[\sin^2 t\right](s)=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

ב. $$\mathcal{L}[A\cos(\omega t+\theta)](s)=\frac{A(s\cos\theta-\omega\sin\theta)}{s^2+\omega^2}$$

ג. $$\mathcal{L}[\cos at\cosh at](s)=\frac{s^3}{s^4+4a^4}$$

ד. $$\mathcal{L}\left[(t^2-5t+6)e^{2t}\right]=\frac{6s^2-29s+36}{(s-2)^3}$$

5. על ידי שימוש בהגדרה והתכונות של התמרת לפלס, חשב את כל אחד מן האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$ ב. $\int_0^\infty t^3e^{-t}\sin t\,dt$

ג. $\int_0^\infty x^4e^{-x}dx$ ד. $\int_0^\infty x^6e^{-3x}dx$

3. שימושים למשוואות דיפרנציאליות רגילות

בסעיף זה נלמד כיצד נעזרים בהתמרות לפלס לפתרון משוואות דיפרנציאליות רגילות הומוגניות מסדר שני בעלי מקדמים קבועים. הפונקציות הנעלמות יהיו מוגדרות בקטע $[0,\infty)$. הצורה הכללית של משוואות אלה היא

$$\begin{cases} ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0, & t>0 \\ y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_1 \end{cases}$$

כאשר a, b, c, y_0, ו־ y_1, הם קבועים ממשיים נתונים. נתאר שיטה כללית למציאת הפתרון הפרטי $y(t)$. הקורא בודאי פגש שיטות שונות למציאת פתרון כזה הנלמדות בכל קורס סטנדרטי אודות משוואות דיפרנציאליות רגילות. אך השימוש בהתמרות לפלס אינו מוגבל למשוואות מסוג זה, והשיטה שנתאר ניתנת ליישום גם על משוואות מסדר גדול יותר, מערכות של משוואות, ועוד. נדגים את השימוש בהתמרת לפלס על ידי פתירת שלוש בעיות טיפוסיות בהתאמה לסוג השורשים של המשוואה האופיינית. בסוף הסעיף נסביר שיטה כללית לפתור כל בעייה מסוג זה.

דוגמא 4.9: נמצא פתרון פרטי לבעייה

$$\begin{cases} y''(t)-y'(t)-6y(t)=0, & t>0 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-1 \end{cases}$$

פתרון: נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים של המשוואה ונקבל

$$.0=\mathfrak{L}[0]=\mathfrak{L}[y''-y'-6y]$$

מתכונת הליניאריות של התמרת לפלס נקבל כי

$$.\mathfrak{L}[y''-y'-6y]=\mathfrak{L}[y'']-\mathfrak{L}[y']-6\mathfrak{L}[y]$$

עכשיו נשתמש בנוסחת הנגזרת ונקבל (ראה נוסחאות **11** ו־**12** שבטבלה)

$$\mathfrak{L}[y']=s\mathfrak{L}[y]-y(0)$$
$$.\mathfrak{L}[y'']=s^2\mathfrak{L}[y]-sy(0)-y'(0)$$

על ידי שימוש בתנאי ההתחלה

$$(s^2-s-6)\mathfrak{L}[y]-s+2=0$$

ומזה יוצא כי

$$.\mathfrak{L}[y]=\frac{s-2}{s^2-s-6}$$

נסמן על ידי $\mathfrak{L}^{-1}$ את התמרת לפלס ההפוכה. בשלב זה נוכל רק לאמר כי $\mathfrak{L}^{-1}$ קיימת. מאחר ו־ $\mathfrak{L}$ היא העתקה ליניארית, הרי שגם $\mathfrak{L}^{-1}$ היא העתקה ליניארית. כלומר

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[aF+bG\right](t)=a\mathfrak{L}^{-1}\left[F\right](t)+b\mathfrak{L}^{-1}\left[G\right](t)$$

כאשר a ו־ b הם סקלרים, $F(s)$ ו־ $G(s)$ הן התמרות לפלס של פונקציות מסוימות.

נוכל כעת לרשום

$$.y(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2-s-6}\right](t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-3)(s+2)}\right](t)$$

בינתיים אין לנו שיטה כללית למציאת התמרת לפלס הפוכה. למרות זאת, נוכל להשתמש בתוצאות שיש לנו בכדי למצוא אותה במקרה הנוכחי. לשם כך נפרק את השבר שלנו לסכום של שברים פשוטים

$$.\frac{s-2}{(s-3)(s+2)}=\frac{1/5}{s-3}+\frac{4/5}{s+2}$$

את ההתמרת לפלס ההפוכה של כל אחד מן השברים הפשוטים נוכל למצוא בטבלה של הסעיף הקודם, ולכן

$$\begin{aligned}
y(t)&=\mathfrak{L}^{-1}\left[\tfrac{s-2}{(s-3)(s+2)}\right](t)\\
&=\mathfrak{L}^{-1}\left[\tfrac{1/5}{s-3}+\tfrac{4/5}{s+2}\right](t)\\
&=\tfrac{1}{5}\mathfrak{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-3}\right](t)+\tfrac{4}{5}\mathfrak{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s+2}\right](t)\\
&=\tfrac{1}{5}e^{3t}+\tfrac{4}{5}e^{-2t}
\end{aligned}$$

נזכיר לקורא כי הביטוי s^2-s-6 הוא **הפולינום האופייני** של המשוואה. הפונקציות e^{3t} ו־ e^{-2t} הם **הפתרונות הבסיסיים של המשוואה**.

לפעמים אין זה קל לפתור תרגילים מסוג זה אך, לעומת זאת, קל מאוד לבדוק אם הפתרון הפרטי שהתקבל מקיים את המשוואה. לכן מומלץ מאוד לבדוק תמיד את התשובות הסופיות.

דוגמא 4.10: נמצא פתרון פרטי לבעייה

$$\begin{cases}y''(t)-2y'(t)+y(t)=0, & t>0\\ y(0)=1,\quad y'(0)=-2\end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{L}[y'' - 2y' + y] \\
&= \mathfrak{L}[y''] - 2\mathfrak{L}[y'] + \mathfrak{L}[y] \\
&= \left[s^2\mathfrak{L}[y] - sy(0) - y'(0)\right] - 2\left[s\mathfrak{L}[y] - y(0)\right] + \mathfrak{L}[y] \\
&= (s^2 - 2s + 1)\mathfrak{L}[y] - s + 4
\end{aligned}$$

לכן

$$.\mathfrak{L}[y] = \frac{s-4}{s^2-2s+1} = \frac{s-4}{(s-1)^2}$$

עכשיו נפרק את השבר לסכום של שברים פשוטים

$$.\mathfrak{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{3}{(s-1)^2}$$

אזי

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-1} - \tfrac{3}{(s-1)^2}\right](t) \\
&= \mathfrak{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s-1}\right](t) - 3\mathfrak{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{(s-1)^2}\right](t) \\
&= e^t - 3te^t
\end{aligned}$$

השתמשנו בנוסחאות **2** ו־**10** שבטבלה.

דוגמא 4.11: נמצא עכשיו פתרון פרטי לבעייה

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0, & t > 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{L}[y'' + 2y' + 5y] \\
&= \mathfrak{L}[y''] + 2\mathfrak{L}[y'] + 5\mathfrak{L}[y] \\
&= \left[s^2\mathfrak{L}[y] - sy(0) - y'(0)\right] + 2\left[s\mathfrak{L}[y] - y(0)\right] + 5\mathfrak{L}[y] \\
&= (s^2 + 2s + 5)\mathfrak{L}[y] - s - 2
\end{aligned}$$

ולכן

$$.\mathfrak{L}[y] = \frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

נציג שתי שיטות שונות למציאת $y(t)$.

שיטה 1: נרשום $s^2+2s+5=(s+1)^2+4$ (השלמה לריבוע), ולכן

$$\frac{s+2}{s^2+2s+5}=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}+\frac{1}{(s+1)^2+4}.$$

הסיבה לצורת הרישום הזו היא שנוכל לנצל את הנוסחאות

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\sin bt\right](s)=\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad \text{ו-} \quad \mathcal{L}\left[e^{at}\cos bt\right](s)=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

לכן

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{s+2}{s^2+2s+5}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{s+1}{(s+1)^2+4}\right](t)+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{2}{(s+1)^2+4}\right](t) \\ &= e^{-t}\cos 2t+\tfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \end{aligned}$$

שיטה 2: נרשום $s^2+2s+5=(s+1-2i)(s+1+2i)$, ונפרק את השבר לסכום רגיל של שברים פשוטים

$$\frac{s+2}{s^2+5s+5}=\frac{1/2-i/4}{s+1-2i}+\frac{1/2+i/4}{s+1+2i}.$$

לכן

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{s+2}{s^2+2s+5}\right](t) \\ &= (\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{4})\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s+1-2i}\right](t)+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{4})\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s+1+2i}\right] \\ &= (\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{4})e^{-(1-2i)t}+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{4})e^{-(1+2i)t} \end{aligned}$$

בשלב האחרון השתמשנו בנוסחה **3** מהטבלה. הבעייה היחידה עם הפתרון שקבלנו כאן היא שהוא נתון על ידי פונקציות מרוכבות, בעוד שאולי רצוי לקבל הצגה ממשית שלו. אם נטרח להמשיך את הפיתוח נקבל

$$\begin{aligned} y(t) &= (\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{4})e^{-t}\left[\cos 2t+i\sin 2t\right]+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{4})e^{-t}\left[\cos 2t-i\sin 2t\right] \\ &= e^{-t}\cos 2t+\tfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \end{aligned}$$

כפי שקבלנו בשיטה 1.

פתרנו, אם כן, שלוש דוגמאות מייצגות של משוואות דיפרנציאליות רגילות הומוגניות מסדר שני בעלות מקדמים קבועים. בדוגמא הראשונה שורשי הפולינום האופייני הם ממשיים ושונים.

בדוגמא השניה השורשים ממשיים אך שווים. בדוגמא השלישית, השורשים מרוכבים (אך צמודים אחד לשני). שלושת הדוגמאות הם לכן אבות טיפוס של כל המשוואות הדיפרנציאליות מן הצורה הנ"ל. לכן, השיטות שהצגנו בשלושת דוגמאות אלה יכולות לשמש לפתרון כל בעייה מסוג זה.

נסכם את השיטה. נתונה המשוואה ההומוגנית

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, & t > 0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

כאשר a, b, c, y_0 ו־ y_1 הם קבועים ממשיים נתונים (ונניח כי $a \neq 0$). נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה ונקבל

$$(as^2 + bs + c)\mathfrak{L}[y](s) - (as + b)y_0 - ay_1 = 0.$$

לכן

$$\mathfrak{L}[y](s) = y_0 \frac{as + b}{as^2 + bs + c} + y_1 \frac{a}{as^2 + bs + c}$$

נסמן

$$F(s) = \frac{as + b}{as^2 + bs + c}, \qquad G(s) = \frac{a}{as^2 + bs + c}.$$

אזי

$$y(t) = y_0 \mathfrak{L}^{-1}[F](t) + y_1 \mathfrak{L}^{-1}[G](t).$$

נציין שהפונקציה $\mathfrak{L}^{-1}[F](t)$ היא הפתרון למשוואה המקיימת את תנאי ההתחלה

$$\mathfrak{L}^{-1}[F](0) = 1, \qquad \mathfrak{L}^{-1}[F]'(0) = 0$$

והפונקציה $\mathfrak{L}^{-1}[G](t)$ היא הפתרון למשוואה המקיימת את תנאי ההתחלה

$$\mathfrak{L}^{-1}[G](0) = 0, \qquad \mathfrak{L}^{-1}[G]'(0) = 1.$$

ניתן לחשב את $\mathfrak{L}^{-1}[F](t)$ ו־ $\mathfrak{L}^{-1}[G](t)$ בדרך הבאה:
אם $as^2 + bs + c = a(s - \alpha)(s - \beta)$ כאשר α ו־ β שונים, אז נוכל לרשום את F (וגם את G) בצורה

$$F(s) = \frac{A}{s - \alpha} + \frac{B}{s - \beta}$$

ולכן

$$\mathfrak{L}^{-1}[F](t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}.$$

אם $as^2+bs+c=a(s-\alpha)^2$ אז נוכל לרשום את F (וגם את G) בצורה

$$F(s)=\frac{A}{s-\alpha}+\frac{B}{(s-\alpha)^2}$$

ולכן

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[F\right](t)=Ae^{\alpha t}+Bte^{\alpha t}.$$

אם $as^2+bs+c=a(s-(\alpha+i\beta))(s-(\alpha-i\beta))$ כאשר α ו־ β ממשיים, ו־ $\beta\neq 0$.
אזי נוכל לרשום את F (וגם את G) בצורה

$$F(s)=\frac{A\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{B(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

ולכן

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[F\right](t)=Ae^{\alpha t}\sin\beta t+Be^{\alpha t}\cos\beta t.$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $\dfrac{3s-14}{s^2-4s+18}$

ב. $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

ג. $\dfrac{1}{s^2-3s+2}$

ד. $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$

ה. $\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$

ו. $\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$

ז. $\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$

ח. $\dfrac{s^3}{s^4-16}$

ט. $\dfrac{1}{s^4+1}$

י. $\dfrac{2s^2+s-10}{(s-4)(s^2+2s+2)}$

2. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''+3y'-4y=0,\quad y(0)=3,\quad y'(0)=-2$

ב. $y''-y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1$

ג. $y''+4y'+4y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ד. $y''+4y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=1$

ה. $y''+4y'+7y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$

ו. $ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

4. פונקצית הביסייד ופונקצית הדלתא של דירק

בסעיף זה נלמד אודות שתי פונקציות מיוחדות, ההתמרות לפלס שלהן, ושימושים שונים אשר יש להן.

פונקצית הביסייד (Heaviside)

לכל קבוע ממשי $c \geq 0$, נגדיר פונקציה

$$u_c(t) = \begin{cases} 1, & c \leq t \\ 0, & 0 \leq t < c \end{cases}$$

שנקראת **פונקצית הביסייד**. זוהי פונקציה פשוטה אשר קל לחשב את ההתמרת לפלס שלה.

$$\mathfrak{L}[u_c](s) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\, dt = \int_c^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_c^\infty = \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0.$$

עבור $c = 0$, $u_0(t) = 1$ ו־ $\mathfrak{L}[u_0](s) = \frac{1}{s}$. הנוסחה אינה תקפה עבור $c < 0$ (מדוע?).
ניתן להשתמש בנוסחה האחרונה בכדי לחשב ביתר קלות את ההתמרת לפלס של כמה פונקציות מסוג דומה.

דוגמא 4.12: יהיו $0 < c < d < \infty$ שני קבועים. נגדיר את הפונקציה

$$f(t) = \begin{cases} 1, & c \leq t < d \\ 0, & t \notin [c, d) \end{cases}.$$

נחשב את ההתמרת לפלס של f. ברור כי $f = u_c - u_d$, ולכן

$$\mathfrak{L}[f](s) = \mathfrak{L}[u_c](s) - \mathfrak{L}[u_d](s) = \frac{e^{-cs} - e^{-ds}}{s}.$$

נציין כי ההגדרה של f בנקודות c ו־ d יכולה להיות שונה מזו שנתנו, מאחר ששינוי ערכי הפונקציה במספר סופי של נקודות אינו משפיע כלל על ההתמרת לפלס שלה.

דוגמא 4.13: תהי $f(t) = [t]$ פונקצית הערך השלם על הקטע $[0, \infty)$. כלומר, אם $n \in \mathbb{Z}$ ו־ $n \leq t < n+1$, אז $f(t) = n$. נחשב את ההתמרת לפלס של f. קל לראות כי

$$f = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots.$$

לכן

$$\mathfrak{L}[f](s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-ns}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^\infty \left(e^{-s}\right)^n = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}, \qquad s > 0.$$

השתמשנו בנוסחת הסכום אינסופי של טור הנדסי.

החשיבות של הפונקציה $u_c(t)$ בהתמרת לפלס נובעת לא מן הדוגמאות הקודמות אלא דווקא מן הנוסחה הבאה.

משפט 4.5: תהי f פונקציה כך ש־ $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדר לכל $s > a$, ויהי $c > 0$. אזי

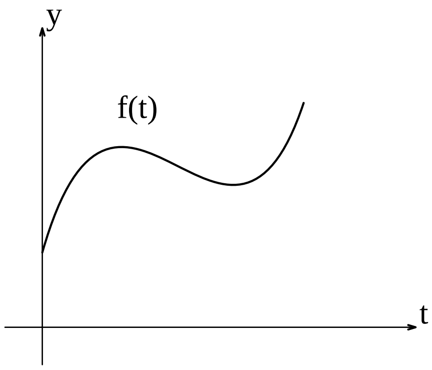
$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)](s) = e^{-cs}\mathcal{L}[f](s), \qquad s > a$$

הוכחה:

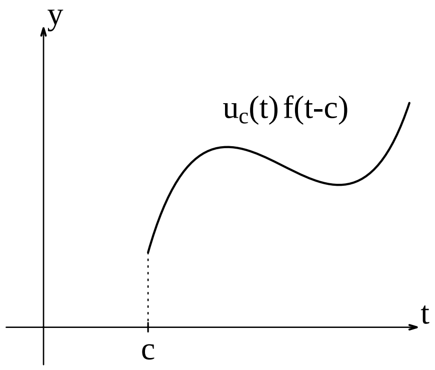
$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)](s) = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)\,dt = \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(c+v)}f(v)\,dv = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)\,dv = e^{-cs}\mathcal{L}[f](s) \quad \blacksquare$$

בציורים 4.1 ו־ 4.2 רואים את היחס שבין הגרף של $f(t)$ והגרף של $u_c(t)f(t-c)$. הגרף של $u_c(t)f(t-c)$ הוא הזזה ימינה ב־ c יחידות של הגרף של $f(t)$, תוך איפוס הפונקציה בקטע $[0,c)$.



ציור 4.1



ציור 4.2

נשתמש גם בנוסחה ההפוכה לזו שבמשפט. כלומר,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}\mathcal{L}[f](s)\right](t) = u_c(t)f(t-c) \tag{4.6}$$

דוגמא 4.14: תהי $f(t) = t^2$. נחשב את $\mathcal{L}[u_1(t)f(t-1)]$. לפני כן, נעיר כי הפונקציה $u_1(t)f(t-1)$ אינה זהה לפונקציה $(t-1)^2$, או לפונקציה t^2 עבור $t \geq 1$. באופן מדויק נוכל לרשום

$$u_1(t)f(t-1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & t \geq 1 \end{cases}.$$

על סמך משפט **4.5**

$$\mathfrak{L}[u_1(t)f(t-1)](s) = e^{-s}\mathfrak{L}[f](s) = \frac{2e^{-s}}{s^3}$$

דוגמא 4.15: תהי

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ t^2, & 2 \le t \end{cases}$$

נחשב את $\mathfrak{L}[f]$. אפשר לעשות זאת על ידי שימוש ישיר בהגדרה

$$\mathfrak{L}[f](s) = \int_2^\infty e^{-st}t^2\,dt.$$

החישוב של האינטגרל כרוך בשימוש כפול באינטגרציה לפי חלקים. קל יותר לעשות זאת על ידי שימוש בנוסחאות ידועות. לשם כך, נחפש פונקציה g כך ש־

$$f(t) = u_2(t)g(t-2).$$

לכל $t \ge 2$, על הפונקציה g לקיים את השוויון

$$t^2 = f(t) = g(t-2)$$

על ידי הצבת $v = t-2$ נקבל כי $g(v) = (v+2)^2$, ולכן

$$g(t) = (t+2)^2 = t^2 + 4t + 4.$$

נשתמש במשפט **4.5** ונקבל

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f](s) &= \mathfrak{L}[u_2(t)g(t-2)](s) = e^{-2s}\mathfrak{L}[g(t)](s) \\ &= e^{-2s}\mathfrak{L}[t^2+4t+4](s) = e^{-2s}\left[\tfrac{2}{s^3} + \tfrac{4}{s^2} + \tfrac{4}{s}\right]\end{aligned}$$

דוגמא 4.16: תהי

$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \le t < 1 \\ t+4, & 1 \le t < 2 \\ 4t-2, & 2 \le t \end{cases}$$

נחשב את $\mathfrak{L}[f]$. לפני כן, נעיר כי $\mathfrak{L}[f]$ אינה סכום רגיל של ההתמרות לפלס של הפונקציות 5, $t+4$, ו־ $4t-2$. כמו בדוגמא הקודמת, אפשר לחשב את $\mathfrak{L}[f]$ על ידי שימוש ישיר בהגדרה

$$\mathfrak{L}[f](s) = \int_0^1 e^{-st}5\,dt + \int_1^2 e^{-st}(t+4)\,dt + \int_2^\infty e^{-st}(4t-2)\,dt.$$

אך יותר פשוט יהיה לרשום את f בצורה

$$f(t) = g_0(t) + u_1(t)g_1(t-1) + u_2(t)g_2(t-2)$$

כאשר g_0, g_1, ו־ g_2 הן פונקציות אלמנטריות, ואז נוכל להשתמש בנוסחה שבמשפט **4.5**. ראשית כל נמצא את הפונקציות g_0, g_1, ו־ g_2. בקטע $[0,1)$ מתקיים השוויון

$$5 = f(t) = g_0(t)$$

לכן נקח $g_0(t) = 5$, לכל $t \geq 0$. בקטע $[1,2)$ צריך להתקיים השוויון

$$t + 4 = f(t) = 5 + g_1(t-1)$$

ולכן $g_1(t-1) = t - 1$. מכאן $g_1(t) = t$, לכל $t \geq 0$. בקטע $[2,\infty)$ מתקיים השוויון

$$4t - 2 = f(t) = 5 + (t-1) + g_2(t-2)$$

ולכן $g_2(t-2) = 3t - 6$. מכאן $g_2(t) = 3t$, לכל $t \geq 0$. עכשיו

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f](s) &= \mathfrak{L}[g_0](s) + e^{-s}\mathfrak{L}[g_1](s) + e^{-2s}\mathfrak{L}[g_2](s) \\ &= \frac{5}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{3e^{-2s}}{s^2} \end{aligned}$$

אחד מן השימושים של משפט **4.5** הוא בפתרון משוואות דיפרנציאליות בהן מופיעה פונקציה בעלת מספר נקודות אי-רציפות, כפי שנראה בדוגמא הבאה.

דוגמא 4.17: נפתור את המשוואה

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = h(t), & t > 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

כאשר

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \notin [\pi, 2\pi) \end{cases}.$$

ברור ש־ $h = u_\pi - u_{2\pi}$, ולכן

$$\mathfrak{L}[y'' + y'](s) = \mathfrak{L}[u_\pi - u_{2\pi}](s)$$

על ידי חישובים קלים נקבל

$$(s^2+s)\mathfrak{L}[y](s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}$$

ולכן

$$\mathfrak{L}[y](s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}.$$

אזי

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s+1)}\right](t) - \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}\right](t).$$

על פי נוסחה **(4.6)**

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2(s+1)}\right](t) = u_\pi(t)g(t-\pi)$$

כאשר

$$g(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right](t)$$

ובאותו אופן

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s^2(s+1)}\right](t) = u_{2\pi}(t)g(t-2\pi).$$

נותר לנו למצוא את g. נפרק את השבר $\frac{1}{s^2(s+1)}$ לסכום של שברים פשוטים

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

על ידי שימוש בנוסחאות **1**, **2**, ו־**6** שבטבלת התמרות לפלס, בהתאמה, נקבל

$$g(t) = e^{-t} - 1 + t$$

ולכן

$$y(t) = u_\pi(t)\left[e^{-(t-\pi)} - 1 + (t-\pi)\right] - u_{2\pi}(t)\left[e^{-(t-2\pi)} - 1 + (t-2\pi)\right].$$

הערה: יש לשים לב לכך ש־ $y(t) \equiv 0$ בקטע $[0,\pi]$. עובדה זו עקבית עם העובדה שהמשוואה הדיפרנציאלית היא הומוגנית בקטע זה וגם תנאי ההתחלה הומוגניים. מצד שני, בקטע $[2\pi,\infty)$, $y(t) \not\equiv 0$, למרות העובדה שגם בקטע זה המשוואה הומוגנית (למה?).

פונקצית דלתא של דירק (Dirac)

הפונקציה שברצוננו להציג עכשיו אינה למעשה פונקציה במובן הרגיל של המילה, אלא "פונקציה" במובן יותר רחב ומסובך להגדרה. אין בידנו את הכלים המתמטיים הנחוצים בכדי להגדיר באופן

מדויק את המובן היותר רחב של מושג הפונקציה, ולכן נאלץ להסתפק בהסברים לא מספיק מדויקים למהי פונקצית הדלתא של דירק. פונקצית הדלתא של דירק או, כפי שהיא נקראת לפעמים, **פונקצית האימפולס** בנקודה a מסומנת על ידי δ_a. במקרה המיוחד של הנקודה $a = 0$, הפונקציה מסומנת לפעמים בקיצור על ידי δ (במקום δ_0). תיכף נראה כי δ_a היא הזזה של δ ב־ a יחידות, ולכן $\delta_a(t) = \delta(t-a)$. נתחיל ב"הגדרה" של δ_a.

"הגדרה:" יהי a מספר ממשי נתון. ה"פונקציה" δ_a המקיימת

$$\int_A f(t)\delta_a(t)\,dt = f(a)$$

עבור כל פונקציה רציפה f בסביבת a, ועבור כל קבוצה A, הכוללת בתוכה סביבה של a, נקראת **פונקצית הדלתא של דירק** בנקודה a.

לא קשה להוכיח כי לא קיימת שום פונקציה רגילה המקיימת תנאי זה לכל f שרציפה בנקודה $x = a$. δ_a אינה קיימת כפונקציה רגילה אלא כפונקציה הפועלת על פונקציות. אחת מן הדרכים המקובלות לתאר את δ_a היא כגבול של תהליך. לכל $c > 0$, נגדיר פונקציה

$$\sigma_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, & a-c < t < a+c \\ 0, & t \notin (a-c, a+c) \end{cases}$$

קל לראות כי לפונקציות σ_c יש את התכונות הבאות:

.1 $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_c(t)\,dt = 1$

.2 $\sigma_c(t) \geq 0$, לכל $t \in \mathbb{R}$

.3 $\lim_{c\to 0^+} \sigma_c(t) = 0$, לכל $t \neq a$

את הפונקציה δ_a נוכל להבין כאילו היתה שווה לגבול "$\lim_{c\to 0^+} \sigma_c(t)$". שוב, הגבול האחרון אינו קיים במובן הרגיל מאחר ובנקודה $t = a$ הגבול אינו קיים. "נבדוק" את התכונה של δ_a. תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה a, ותהי $A = \mathbb{R}$. אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_a(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\lim_{c\to 0^+} \sigma_c(t)\right]dt = \lim_{c\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma_c(t)\,dt$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\frac{1}{2c}\int_{a-c}^{a+c} f(t)\,dt = \lim_{c\to 0^+}\frac{1}{2c}[2cf(t_c)] = f(a)$$

בשלב האחרון השתמשנו במשפט ערך הביניים האינטגרלי, אשר ממנו נובע שלכל $c > 0$ קיימת

נקודה $a-c<t_c<a+c$ כך ש־

$$\int_{a-c}^{a+c} f(t)\,dt = 2cf(t_c)$$

וברור שכאשר c שואף לאפס, t_c שואף ל־ a. נחזור ונציין שוב כי "ההוכחה" הנ"ל אינה נכונה.

מה"הגדרה" נובע כי

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_a(s)\,ds = \begin{cases} 0, & t<a \\ 1, & t>a \end{cases} = u_a(t)$$

ולכן, במובן מסוים, נוכל לומר כי "$\delta_a(t) = u_a'(t)$". נוכל גם לחשב את ההתמרת לפלס של δ_a, לכל $a>0$:

$$.\mathcal{L}[\delta_a](s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta_a(t)\,dt = e^{-as}$$

לא נגדיר את ההתמרת לפלס של δ_0. לפונקציה δ_a נודעת חשיבות רבה בתורת הסיגנלים ובהקשר למשוואות הדיפרנציאליות הנוגעות לכך. נביא דוגמא פשוטה.

דוגמא 4.18: נמצא פתרון פרטי לבעייה

$$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)+2y(t) = \delta_\pi(t), & t>0 \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

פתרון: נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה ונקבל

$$(s^2+2s+2)\mathcal{L}[y] = e^{-\pi s}$$

ולכן

$$.y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}\right](t)$$

על פי משפט **4.5** (ראה נוסחה **4.6**)

$$y(t) = u_\pi(t)g(t-\pi)$$

כאשר

$$.g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right](t) = e^{-t}\sin t$$

לכן

$$.y(t) = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$$

תרגילים

1. חשב את ההתמרת לפלס של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

א. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le T\\ 0, & t>T\end{cases}$

ב. $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 1\\ (t-1)^2, & t>1\end{cases}$

ג. $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0\le t<2\\ 4t, & t\ge 2\end{cases}$

ד. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 7\\ 3-t, & 7<t<8\\ 1, & 8\le t\end{cases}$

2. חשב את ההתמרת לפלס ההפוכה של כל אחת מן הפונקציות הבאות.

א. $\dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}$

ב. $\dfrac{e^{-16s}}{s(s^2+2s+4)}$

3. הוכח כי

$$\mathcal{L}[\cos t\ln t\,\delta_\pi(t)]=-e^{-\pi s}\ln\pi.$$

4. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''(t)+4y'(t)+7y(t)=u_1(t),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ב. $y''(t)+2y'(t)+3y(t)=\delta_\pi(t),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ג. $y''(t)-2y'(t)+y(t)=(-1)^{[t]},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$

ד. $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=\delta_\pi(t),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

ה. $y''(t)+4y(t)=\delta_\pi(t)-\delta_{2\pi}(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$

ו. $y'''(t)-y(t)=h(t),\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y''(0)=1$

כאשר

$$h(t)=\begin{cases}1, & \pi\le t\le 2\pi\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}.$$

5. פתור את משוואת ההפרשים הבאה: $y'(t)+y(t-1)=t^2$, $t>0$, כאשר $y(t)=0$, לכל $t\le 0$.

הדרכה: השתמש בטורי חזקות.

5. קונבולוציה

עבור התמרת פוריה הוכחנו כי

$$.\mathcal{F}[f*g](\omega)=2\pi\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[g](\omega)$$

אותה הנוסחה נכונה גם עבור התמרת לפלס ללא ה־ 2π

$$\mathcal{L}[f*g](s)=\mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s)$$

אך ראשית כל עלינו להבין מהי קונבולוציה במקרה של התמרת לפלס. בפרק **3** הגדרנו

$$.(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-y)g(y)\,dy$$

בפרק הנוכחי, הפונקציות שלנו אינן מוגדרות בקטע $(-\infty,0)$. בכדי שנוכל להשתמש בהגדרה זו, נרחיב את תחום ההגדרה שלהן גם לקטע $(-\infty,0)$ כך שהן יהיו שוות לאפס בקטע זה. לכן נוכל לרשום

$$.(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-y)g(y)\,dy$$

בגלל ש־ $g(y)=0$ לכל $y<0$ ו־ $f(t-y)=0$ לכל $t<y$, נקבל ש־

$$.(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-y)g(y)\,dy=\begin{cases}0, & t<0\\ \int_0^t f(t-y)g(y)\,dy, & t\geq 0\end{cases}$$

זוהי הסיבה לכך שעבור f ו־ g המוגדרות בקטע $[0,\infty)$, אנו מגדירים

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy,\qquad t\geq 0$$

לכל t אשר עבורו קיים האינטגרל. על ידי הצבה פשוטה, קל לראות כי לכל t מתקיים השוויון

$$.(f*g)(t)=(g*f)(t)$$

משפט 4.6: **אם קיימים קבועים a, K_1, ו־ K_2 כך ש־ $|f(t)|\leq K_1e^{at}$ ו־ $|g(t)|\leq K_2e^{at}$, לכל $t\geq 0$, אזי**

$$|(f*g)(t)|\leq K_1K_2te^{at},\qquad t\geq 0$$

ומתקיים השוויון

$$.\mathcal{L}[f*g](s)=\mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s),\qquad s>a$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}|(f*g)(t)| &= \left|\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy\right| \le \int_0^t |f(t-y)|\cdot|g(y)|\,dy \\ &\le \int_0^t K_1e^{a(t-y)}K_2e^{ay}dy \le K_1K_2e^{at}\int_0^t dy \\ &= K_1K_2te^{at}\end{aligned}$$

מכך נובע ש־ $e^{-st}(f*g)(t)$ אינטגרבילית בהחלט לכל $s>a$, ולכן ההתמרת לפלס של $f*g$ קיימת לכל $s>a$. על פי הנתונים, הפונקציות $e^{-st}f(t)$ ו־ $e^{-st}g(t)$ אינטגרביליות בהחלט בקטע $[0,\infty)$, לכל $s>a$. לכן

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f*g](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy\right)dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-s(t-y)}f(t-y)e^{-sy}g(y)\,dy\right)dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-s(t-y)}f(t-y)e^{-sy}g(y)\,dt\right)dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-s(t-y)}f(t-y)\,dt\right)e^{-sy}g(y)\,dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\right)e^{-sy}g(y)\,dy \\ &= \mathfrak{L}[f](s)\int_0^\infty e^{-sy}g(y)\,dy \\ &= \mathfrak{L}[f](s)\cdot\mathfrak{L}[g](s) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

מסקנה מיידית חשובה ושימושית למשפט זה היא שאם $F=\mathfrak{L}[f]$ ו־ $G=\mathfrak{L}[g]$ אזי

$$.\mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right](t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)\,dy \qquad (4.7)$$

נדגים כעת כמה שימושים קלים של משפט **4.6** ונוסחה **(4.7)**.

דוגמא 4.19: תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$. נגדיר

$$\varphi(t) = \int_0^t f(y)\,dy$$

נבטא את $\mathcal{L}[\varphi]$ באמצעות $\mathcal{L}[f]$. נעשה זאת בשתי שיטות.

שיטה 1: ניתן לבדוק ש־ $\varphi(t) = (f * g)(t)$, כאשר $g(t) \equiv 1$. לכן

$$\mathcal{L}[\varphi](s) = \mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}.$$

שיטה 2: מאחר ו־ $\varphi(0) = 0$ ו־ $\varphi'(t) = f(t)$, נוכל להשתמש בנוסחת הנגזרת

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[\varphi'](s) = s\mathcal{L}[\varphi] - \varphi(0) = s\mathcal{L}[\varphi](s)$$

ולכן נקבל שוב

$$\mathcal{L}[\varphi](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}.$$

דוגמא 4.20: תהי $F(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$, כאשר $a > 0$. נחשב את $\mathcal{L}^{-1}[F]$ בשתי שיטות.

שיטה 1: נוכל לרשום $F(s) = G(s)H(s)$, כאשר $G(s) = \frac{1}{s^2}$ ו־ $H(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$. על פי נוסחה **6** שבטבלת התמרות לפלס $\mathcal{L}^{-1}[G](t) = t$, ולפי נוסחה **4** $\mathcal{L}^{-1}[H](t) = \sin at$. לכן ממשפט **4.6** (נוסחה **4.7**) נקבל

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \int_0^t (t-y)\sin ay\, dy.$$

חישוב שיגרתי של האינטגרל נותן את התוצאה

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{t}{a} - \frac{\sin at}{a^2}.$$

שיטה 2:

$$F(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{1/a}{s^2} - \frac{1/a}{s^2+a^2}$$

ולכן

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) - \frac{1}{a^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right](t) = \frac{t}{a} - \frac{\sin at}{a^2}.$$

דוגמא 4.21: נמצא פונקציה f המקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_0^t f(t-u)f(u)\, du = te^{-at}, \qquad t \geq 0.$$

על סמך נוסחה (**4.7**), אם נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים נקבל

$$\mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[f](s)=\frac{1}{(s-a)^2}.$$

לכן $\mathcal{L}[f](s)=\pm\frac{1}{s-a}$, אזי $f(t)=\pm e^{at}$.

דוגמא 4.22: נפתור את המשוואה האינטגרלית

$$g(t)+\int_0^t g(u)e^{-(t-u)}du=1,\qquad t\geq 0.$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים

$$\mathcal{L}[g](s)+\mathcal{L}\left[g(t)*e^{-t}\right](s)=\mathcal{L}[1](s)$$

ולכן

$$\mathcal{L}[g](s)+\mathcal{L}[g](s)\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s}.$$

נחלץ את $\mathcal{L}[g]$ ונקבל

$$\mathcal{L}[g](s)=\frac{s+1}{s(s+2)}=\frac{1/2}{s}+\frac{1/2}{s+2}.$$

הפתרון למשוואה הוא לכן $g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}$.

על סמך פעולת הקונבולוציה, נוכל להציג כעת שיטה כללית למציאת הפתרון של כל משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר שני עם מקדמים קבועים בקטע $[0,\infty)$, עם תנאי התחלה בנקודה $t=0$. הצורה הכללית של הבעייה היא

$$\begin{cases} ay''(t)+by'(t)+cy(t)=h(t), & t>0\\ y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_1 \end{cases}$$

כאשר a, b, c, y_0, ו- y_1 הם קבועים ממשיים, $a\neq 0$, ו- $h(t)$ היא פונקציה נתונה בקטע $[0,\infty)$. בסעיף **4.3** מצאנו שיטה כללית לפתרון המשוואה ההומוגנית. בכדי להשלים את התמונה יספיק לנו לפתור את המשוואה הלא-הומוגנית

$$\begin{cases} ay''(t)+by'(t)+cy(t)=h(t), & t>0\\ y(0)=0,\quad y'(0)=0 \end{cases}$$

אם נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים של המשוואה נקבל

$$(as^2+bs+c)\mathcal{L}[y](s)=H(s)$$

כאשר $H(s)=\mathfrak{L}[h](s)$. לכן

$$\mathfrak{L}[y](s)=\frac{H(s)}{as^2+bs+c}.$$

נסמן

$$F(s)=\frac{1}{as^2+bs+c}.$$

על ידי השיטות של סעיף **4.3** נוכל לחשב את

$$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[F\right](t).$$

הפתרון לבעייה לכן נתון על ידי

$$y(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[H(s)F(s)\right](t)=\int_0^t f(t-y)h(y)\,dy.$$

ברור כי אין צורך לחשב את $H(s)$.

תרגילים

1. חשב את ההתמרת לפלס של הפונקציה

$$f(t)=\int_0^t (u^2-u+e^{-u})\,du.$$

2. פתור את כל אחת מהמשוואות האינטגרליות הבאות.

א. $f(t)+2\int_0^t f(u)\cos(t-u)\,du=9e^{2t}$

ב. $\int_0^t f(u)\,du-f'(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le a\\ 1, & a\le t\end{cases}$, $a>0$

ג. $f(t)+\int_0^t (t-u)f(u)\,du=\sin 2t$

ד. $f''(t)=\int_0^t uf(t-u)\,du$, $f(0)=-1$, $f'(0)=1$

ה. $f(t)+\int_0^t f(u)e^{-(t-u)}du=1$

ו. $\int_0^t f'(u)f(t-u)\,du=3te^{3t}-e^{3t}+1$, $f(0)=0$, $f'(0)>0$

ז. $f(0)=2$,$3f'(t)-10f(t)+3\int_0^t f(u)\,du=10\sin t-5$

ח. $\int_0^t f(u)f(t-u)\,du=2f(t)+t-2$, האם הפתרון הוא יחיד?

ט. $f(0)=1$,$f'(t)+\int_0^t f(u)\,du=\sin t$

י. $f'(0)=1$,$f(0)=\frac{1}{a}$,$\int_0^t f''(t)f(t-u)\,du=te^{at}$

יא. $f(t)=at+\int_0^t f(u)\sin(t-u)\,du$

יב. $f(0)=2$,$f'(t)+5\int_0^t f(u)\cos 2(t-u)\,du=10$

יג. $f(0)=0$,$\int_0^t f'(u)f(t-u)\,du=24t^3$

3. לכל אחת מהמשוואות הדיפרנציאליות הבאות, מצא פתרון פרטי בקטע $[0,\infty)$ המקיים את תנאי ההתחלה המצורפים.

א. $y''(t)+y(t)=g(t), \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$

כאשר

$$g(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1, & 1\le t \end{cases}$$

ב. $y''(t)+2y'(t)-3y(t)=f(t), \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

כאשר

$$f(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le 2\pi \\ \sin t, & t>2\pi \end{cases}$$

ג. $y''(t)+2y'(t)+3y(t)=\delta_\pi(t)+\sin t, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1$

ד. $y''(t)+y(t)=\delta_\pi(t)\cos t, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=1$

ה. $y'''(t)-y''(t)+4y'(t)-4y(t)=68e^x\sin 2x$,

$y(0)=1, \quad y'(0)=-19, \quad y''(0)=-37$

ו. $y''(t)+9y(t)=f_c(t), \qquad y(0)=a, \quad y'(0)=b$

כאשר עבור $c>0$,

$$f_c(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le c \\ t-c, & c<t \end{cases}$$

4. תהי $y_1(t)$ פתרון של הבעייה

$$y''(t)-4y'(t)+4y(t)=f_1(t), \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=1, \quad (t\ge 0)$$

ותהי $y_2(t)$ פתרון של הבעייה

$$y''(t)-4y'(t)+4y(t)=f_2(t), \qquad y(0)=1, \quad y'(0)=1, \quad (t\ge 0)$$

כאשר נתון ש־ $f_1(t)\le f_2(t)$, לכל $t\ge 0$, ושהפונקציות f_1 ו־ f_2 רציפות וחסומות בקטע $[0,\infty)$. הוכח כי $y_1(t)\le y_2(t)$ עבור כל $t\ge 0$.

6. דוגמאות ושימושים נוספים

בסעיף זה נביא כמה דוגמאות ושימושים נוספים של התמרת לפלס. הסעיפים שבאים לאחר סעיף זה אינם תלויים בו ולכן ניתן לדלג עליו.

דוגמא 4.23: נחשב את ההתמרת לפלס של $f(t)=t^p$, $t\ge 0$, $p>-1$. קל לראות שלכל $p>-1$, $\mathcal{L}[f](s)$ מוגדרת לכל $s>0$. נציב $u=st$ ($s>0$) ונקבל

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}t^p dt=\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^p\frac{du}{s}=\frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^p du.$$

הערך של $\int_0^\infty e^{-u}u^p du$ הוא בלתי תלוי ב־ s, והוא למעשה פונקציה של p הנקראת **פונקצית גמא** (**Gamma**). ההגדרה המקובלת של פונקצית גמא היא

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du, \qquad p>0$$

ולכן נוכל לומר לסיכום כי

$$\mathcal{L}[t^p](s)=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \qquad s>0, \quad p>-1.$$

הבעייה היחידה היא שאיננו יודעים למה שווה $\Gamma(p+1)$. תוצאה זו כוללת בתוכה את התוצאה הקודמת שקבלנו בדוגמא **4.6**

$$\mathcal{L}[t^n](s)=\frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s>0, \quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

משתי התוצאות האלה נובע כי $\Gamma(n+1)=n!$, לכל $n\in\mathbb{Z}_+$. עובדה זו נובעת גם מהגדרת הפונקציה Γ ואינטגרציה לפי חלקים והיא גם נובעת מהתכונות של פונקצית גמא שנציג כעת.

תבונות של פונקצית גמא

1. לכל $p>0$, $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$.

הוכחה: עבור $p>0$

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1)&=\int_0^\infty e^{-u}u^p du\\&=-e^{-u}u^p\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\left(-e^{-u}\right)\left(pu^{p-1}\right)du\\&=p\int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du\\&=p\Gamma(p)\end{aligned}$$ ∎

2. $\Gamma(1)=1$.

הוכחה:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-u}du=-e^{-u}\Big|_0^\infty=1$$ ∎

3. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

הוכחה:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du$$

נציב $v=u^{\frac{1}{2}}$. נקבל $dv=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$, ולכן

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-v^2}dv=\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv.$$

בפרק **3** (ראה תרגיל **2**) ראינו שהאינטגרל האחרון שווה $\sqrt{\pi}$, ולכן $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. ∎

מתכונות **1** ו־**3** נובע ש־

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi},\qquad n\in\mathbb{N}$$

ולכן

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}},\qquad \mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right](s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}},\quad \ldots.$$

דוגמא 4.24: פונקצית בטא (Beta) מוגדרת על ידי

$$.\mathcal{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \qquad p,q>0$$

נחשב את $\mathcal{B}(p,q)$ עבור כל $p,q>0$, על ידי שימוש בהתמרת לפלס. נגדיר

$$.g(t)=\int_0^t x^{p-1}(t-x)^{q-1}dx$$

ברור כי $g(1)=\mathcal{B}(p,q)$, וכי $g(t)$ היא הקונבולוציה של הפונקציות $f(t)=t^{p-1}$ ו־ $h(t)=t^{q-1}$. לכן

$$\mathcal{L}[g](s)=\mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[h](s)=\frac{\Gamma(p)}{s^p}\cdot\frac{\Gamma(q)}{s^q}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}$$

ולכן

$$\begin{aligned} g(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}\right](t)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(p+q)}{s^{p+q}}\right](t)\\ &=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}t^{p+q-1}\end{aligned}$$

אזי

$$\int_0^t x^{p-1}(t-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}t^{p+q-1}$$

ובפרט

$$.\mathcal{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

דוגמא 4.25: בתוך הוכחת משפט **3.3** חשבנו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. נציג עוד שיטה לחישוב אינטגרל זה. לכל $t>0$ נגדיר

$$f(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx$$

ברור כי האינטגרל שלנו שווה ל־ $f(1)$. (על ידי ההצבה $u=tx$ אפשר לראות כי למעשה f היא פונקציה קבועה, אך אין זה מענייננו.)

$$.\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx\right)dt$$

נחליף את סדר האינטגרציה (זה אפשרי כאן) ונקבל

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f](s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}\sin tx\,dt\right)\frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty \frac{x}{s^2+x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש־ $\mathfrak{L}[\sin tx](s) = \frac{x}{s^2+x^2}$. על ידי ההצבה $su = x$ נקבל

$$\mathfrak{L}[f](s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{s}\arctan u\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2s}.$$

לכן

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\pi}{2s}\right] = \frac{\pi}{2}$$

ובפרט $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

דוגמא 4.26: האינטגרלים $\int_0^\infty \cos u^2\,du$ ו־ $\int_0^\infty \sin u^2\,du$ נקראים אינטגרלים של פרנל (Fresnel). אנו נחשב את האינטגרלים $\int_0^\infty \cos u^2\,du$ ו־ $\int_0^\infty \sin u^2\,du$. נוכיח כי $\int_0^\infty \cos u^2\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, ובאותה שיטה ניתן להוכיח כי $\int_0^\infty \sin u^2\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$. נגדיר

$$f(t) = \int_0^\infty \cos tu^2\,du.$$

אזי עבור $s > 0$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty \cos tu^2\,du\right)dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}\cos tu^2\,dt\right)du \\ &= \int_0^\infty \frac{s}{s^2+u^4}\,du\end{aligned}$$

ניתן להצדיק את החלפת סדר האינטגרציה, והתוצאה הסופית נובעת מן העובדה ש־

$$\mathfrak{L}\left[\cos tu^2\right](s) = \frac{s}{s^2+(u^2)^2}.$$

נציב $x = \frac{u}{\sqrt{s}}$, $s > 0$, ונקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty \frac{s}{s^2 + s^2x^4}\sqrt{s}\,dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx\end{aligned}$$

על ידי שיטת השברים החלקיים של החשבון האינטגרלי, או על ידי שימוש במשפט הרזידואום של הפונקציות המרוכבות (ראה הסעיפים הבאים), ניתן להגיע ל־

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \; .$$

לכן $\mathcal{L}[f](s) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{s}}$. ראינו כבר כי $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$, ולכן

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

ומזה נקבל מייד כי

$$\int_0^\infty \cos u^2\,du = f(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \; .$$

תרגילים

1. פתור את כל אחת מהמשוואות האינטגרליות הבאות.

א. $\displaystyle\int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt{t-u}}\,du = 1 + t + t^2$

ב. $\displaystyle\int_0^t \frac{f(u)}{\sqrt[3]{t-u}}\,du = t(1+t)$

2. הוכח שלכל $p, q > 0$,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta = \mathcal{B}(p,q) \; .$$

3. חשב את האינטגרלים

א. $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-2x^2}dx$ ב. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt[4]{x}e^{-\sqrt{x}}dx$

4. הוכח שלכל $p > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1} dx = \Gamma(p)$.

5. הוכח שלכל $p, q > -1$, $\int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(p+1)^{q+1}}$.

6. חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$ ב. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$

7. **פונקציית זטא** של רימן מוגדרת לכל $p > 1$ על ידי

$$\zeta(p) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots.$$

הוכח כי

$$\zeta(p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

7. נוסחת ההתמרה ההפוכה

בסעיף **3.4** הצגנו נוסחה סגורה עבור ההתמרה ההפוכה להתמרת פוריה. בסעיף זה, ברצוננו לתת נוסחה דומה עבור התמרת לפלס ההפוכה, אלא שכאן העניין הוא יותר מסובך. בכדי לקבל את הנוסחה להתמרת לפלס הפוכה, יהיה עלינו להכליל את ההגדרה של התמרת לפלס כך ש־ $\mathfrak{L}[f](\sigma)$ תהיה מוגדרת עבור ערכים מרוכבים $\sigma \in \mathbb{C}$.

יהי $\sigma = s + iv$ מספר מרוכב כלשהו, כאשר $s = \mathrm{Re}(\sigma)$ ו־ $v = \mathrm{Im}(\sigma)$. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין, המוגדרת בקטע $[0, \infty)$ והמקבלת ערכים ב־ $\mathbb{C}$. נגדיר

$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, dt$$

לכל σ אשר עבורו האינטגרל מתכנס. אם $\sigma = s$ אז $F(\sigma) = F(s) = \mathfrak{L}[f](s)$.

טענה 4.7: **יהי $a \in \mathbb{R}$. אם $e^{-at} f(t)$ רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט בקטע $[0, \infty)$, אזי $F(\sigma)$ מוגדרת לכל $\sigma \in \mathbb{C}$ כך ש־ $\mathrm{Re}(\sigma) \geq a$.**

הוכחה: יהי $s = \mathrm{Re}(\sigma) \geq a$. אזי

$$\left|e^{-\sigma t}\right| = \left|e^{-(s+iv)t}\right| = \left|e^{-st} e^{-ivt}\right| = e^{-st}.$$

לכן לכל $t \geq 0$

$$\left|e^{-\sigma t} f(t)\right| = e^{-st}|f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|$$

ו־ $e^{-\sigma t} f(t)$ אינטגרבילית בהחלט. אזי $F(\sigma)$ מוגדרת. ∎

התוצאה הבאה אינה דרושה לנו בכדי לקבל את נוסחת ההתמרה ההפוכה אבל היא תוצאה חשובה בפני עצמה, אשר תסייע לנו בשימושים השונים שיש לנוסחת ההתמרה ההפוכה.

משפט 4.8: אם $e^{-at}f(t)$ **רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט בקטע** $[0,\infty)$ **אזי** $F(\sigma)$ **אנליטית** בחצי המישור המרוכב $a < \mathrm{Re}(\sigma)$.

הוכחה: ראשית כל נוכיח כי $F(\sigma)$ רציפה בתחום $\mathrm{Re}(\sigma) > a$. תהי σ_n סדרה של נקודות בתחום המתכנסת לנקודה σ^* אשר גם היא שייכת לתחום. בכדי להוכיח את הרציפות, נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} F(\sigma_n) = F(\sigma^*)$. על פי ההגדרה

$$\begin{aligned}
|F(\sigma_n) - F(\sigma^*)| &= \left| \int_0^\infty \left(e^{-\sigma_n t} - e^{-\sigma^* t}\right) f(t)\, dt \right| \\
&\le \int_0^\infty \left|e^{-\sigma_n t} - e^{-\sigma^* t}\right| |f(t)|\, dt
\end{aligned}$$

ברור כי

$$\lim_{n\to\infty} \left|e^{-\sigma_n t} - e^{-\sigma^* t}\right| = 0$$

לכל $t \ge 0$, משום ש־ $\lim_{n\to\infty} e^{-\sigma_n t} = e^{-\sigma^* t}$. אם נמצא פונקציה אינטגרבילית בהחלט g כך ש־

$$\left|e^{-\sigma_n t} - e^{-\sigma^* t}\right| \cdot |f(t)| \le g(t) \tag{4.8}$$

אז ממשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג (ראה משפט **3.2**) נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left|e^{-\sigma_n t} - e^{-\sigma^* t}\right| \cdot |f(t)|\, dt = 0$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}[F(\sigma_n) - F(\sigma^*)] = 0$. נתון לנו ש־ $\mathrm{Re}(\sigma_n), \mathrm{Re}(\sigma^*) = s^* > a$, ולכן

$$\left|e^{-\sigma_n t} - e^{-\sigma^* t}\right| \le \left|e^{-\sigma_n t}\right| + \left|e^{-\sigma^* t}\right| < 2e^{-at} \, .$$

הפונקציה $g(t) = 2e^{-at}|f(t)|$ אינטגרבילית בהחלט והיא מקיימת את נוסחה **(4.8)**. לכן F רציפה בחצי המישור המרוכב $\mathrm{Re}(\sigma) > a$.

נוכיח עכשיו כי F אנליטית בתחום זה. לשם כך נשתמש במשפט קושי (Cauchy) ובמשפט מוררה (Morrera) שנזכיר פה.

משפט קושי: אם G היא פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר $\mathcal{D}$, אזי לכל עקום פשוט וסגור C בתוך התחום $\mathcal{D}$ מתקיים

$$\oint_C G(z)\, dz = 0 \, .$$

משפט מוררה: אם F רציפה בתחום פשוט קשר $\mathcal{D}$, ואם לכל עקום פשוט קשר וסגור C בתוך $\mathcal{D}$ מתקיים

$$\oint_C F(z)\,dz = 0$$

אזי F אנליטית בתחום $\mathcal{D}$.

להוכחת שני משפטים אלה, ראה למשל את הספר

Complex Variables and Applications,
by R. V. Churchill, J. W. Brown, and R. F. Verhey.

התחום שלנו הוא $\mathrm{Re}(\sigma) > a$. יהי C עקום פשוט וסגור כלשהו בתחום זה. לפי הגדרת הפונקציה F

$$\oint_C F(\sigma)\,d\sigma = \oint_C \left(\int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\,dt\right) d\sigma\,.$$

מאחר ו- $e^{-\sigma t}f(t)$ אינטגרבלית בהחלט, נוכל להחליף את סדר האינטגרציה ולקבל

$$\oint_C F(\sigma)\,d\sigma = \int_0^\infty \left(\oint_C e^{-\sigma t} d\sigma\right) f(t)\,dt\,.$$

הפונקציה $G(\sigma) = e^{-\sigma t}$ (כאשר t קבוע) היא פונקציה אנליטית במשתנה σ בכל $\mathbb{C}$, ולכן ממשפט קושי נובע

$$\oint_C e^{-\sigma t} d\sigma = 0$$

לכל t. לכן

$$\oint_C F(\sigma)\,d\sigma = 0\,.$$

מן העובדה ש- F רציפה בתחום וממשפט מוררה נובע כי F אנליטית בתחום $\mathrm{Re}(\sigma) > a$. ∎

הערה: פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר נקבעת לחלוטין על ידי הערכים שלה בקבוצה קטנה יחסית של נקודות. למשל, הפונקציה נקבעת לגמרי על ידי הערכים שהיא מקבלת בקטע כלשהו שנמצא בתחום. לכן אם $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, לכל $s > a$, אזי $F(\sigma)$ נקבעת לגמרי על ידי $\mathcal{L}[f](s)$. עובדה זו חשובה מאחר והיא מאפשרת לנו לקבל את $F(\sigma)$ באופן מיידי מ- $\mathcal{L}[f](s)$ בלי צורך בחישובים נוספים. למשל עבור $f(t) = 1$ ידוע לנו כי $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$. לכן $F(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$. באופן דומה, אם לכל $s > a$, ידוע לנו כי $F(s) = \frac{e^{-ds}}{s^2+bs+c}$, אז בהכרח $F(\sigma) = \frac{e^{-d\sigma}}{\sigma^2+b\sigma+c}$.

משפט 4.9: (נוסחת התמרת לפלס ההפוכה) **נניח ש־ $e^{-at}f(t)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[0,\infty)$, ונניח כי $f(t)$ רציפה והנגזרות החד-צדדיות קיימות בכל נקודה t. תהי**

$$.F(\sigma)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}f(t)\,dt,\qquad \sigma\in\mathbb{C},\quad \mathrm{Re}(\sigma)>a$$

אזי

$$f(t)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM}e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma,\qquad t>0$$

עבור כל $s>a$.

הערה: האינטגרציה נעשית לאורך קו ישר מן הצורה

$$L_s=\{\sigma=s+iv\in\mathbb{C}\mid -\infty<v<\infty\}$$

כך ש־ $s>a$. זהו קו ישר המקביל לציר המדומה של המישור המרוכב, הכלול בשלמותו בתוך התחום $\mathrm{Re}(\sigma)>a$, אשר בו F אנליטית. התוצאה של האינטגרציה, $f(t)$, תתקבל לכל בחירה שרירותית של $s>a$; הנוסחה הנ"ל נקראת לפעמים גם נוסחת האינטגרל של ברומיץ' (Bromwich).

נשים לב שבכדי לקבל את f מ־ $\mathfrak{L}[f]$ עלינו לבצע שתי פעולות

א. להרחיב את $\mathfrak{L}[f](s)$ ל־ $F(\sigma)$, לכל σ בתחום $\mathrm{Re}(\sigma)>a$.

ב. לחשב את האינטגרל של $\frac{1}{2\pi i}e^{\sigma t}F(\sigma)$ לאורכו של אחד מן הקווים L_s, עבור $s>a$. הבחירה של $s>a$ נתונה לשיקול דעתנו.

הוכחת משפט 4.9: נשתמש בהתמרת פוריה ובהתמרת פוריה ההפוכה. יהי $s>a$ ונניח שהוא קבוע לאורך כל הדיון. נגדיר את הפונקציה

$$G(v)=F(s+iv),\qquad v\in\mathbb{R}$$

כלומר

$$\begin{aligned}G(v)&=\int_0^\infty e^{-(s+iv)t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-ivt}\left[e^{-st}f(t)\right]dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-ivt}g(t)\,dt\end{aligned}$$

כאשר

$$.g(t)=\begin{cases}2\pi e^{-st}f(t), & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

הפונקציה g רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט. לכן

$$G(v) = \mathfrak{F}[g](v).$$

כמו-כן, הנגזרות החד-צדדיות של g קיימות בכל נקודה $t \neq 0$, ולכן על פי משפט התמרת פוריה ההפוכה (משפט **3.3**)

$$g(t) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^{ivt}\mathfrak{F}[g](v)\,dv = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^{ivt} G(v)\,dv, \qquad t \neq 0.$$

לכל $t > 0$ אנו מקבלים

$$2\pi e^{-st} f(t) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^{ivt} F(s+iv)\,dv$$

ולכן

$$f(t) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} e^{(s+iv)t} F(s+iv)\,dv.$$

האינטגרציה כאן היא לפי v לאורך $\mathbb{R}$. נציב $\sigma = s + iv$, ונקבל $v = \frac{\sigma - s}{i}$, ו- $dv = \frac{d\sigma}{i}$. לכן

$$f(t) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t} F(\sigma)\,d\sigma. \qquad \blacksquare$$

בנקודה $t = 0$, האינטגרל ישאף ל- $f(0+)/2$.

8. שימוש בנוסחת ההתמרה ההפוכה

בהשוואה לשימוש בנוסחת התמרת פוריה ההפוכה, השימוש בנוסחה התמרת לפלס ההפוכה הוא פחות נוח. החישוב של האינטגרל $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{\sigma t} F(\sigma)\,d\sigma$ עשוי להיות מסובך במקרים רבים. אנו נציג בסעיף זה את אחת השיטות הטבעיות והפשוטות לחישוב אינטגרלים מסוג זה. השיטה מבוססת על משפט הרזידואום.

משפט הרזידואום: אם C הוא עקום סגור ופשוט ו- g פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר הכולל בתוכו את C חוץ אולי ממספר סופי של נקודות σ_1, σ_2, ... , σ_n בתוך (ולא על) C, אזי

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C g(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\{g; \sigma_j\}.$$

הרזידואום של g בנקודה σ_j הוא המקדם של $(z-\sigma_j)^{-1}$ בפיתוח g לטור לורן (Laurent) סביב לנקודה σ_j. אם ל־ g יש קוטב (pole) מסדר m בנקודה σ_j אזי

$$\operatorname{Res}\{g;\sigma_j\} = \lim_{\sigma\to\sigma_j} \frac{d^{m-1}}{d\sigma^{m-1}}\left[\frac{(\sigma-\sigma_j)^m g(\sigma)}{(m-1)!}\right].$$

במקרה המיוחד בו $g(\sigma)=\frac{p(\sigma)}{q(\sigma)}$, כאשר $p(\sigma)$ ו־ $q(\sigma)$ אנליטיות בסביבת σ_j, $p(\sigma_j)\neq 0$, $q(\sigma_j)=0$, ו־ $q'(\sigma_j)\neq 0$, אזי ל־ g יש קוטב פשוט (מסדר 1) בנקודה $\sigma=\sigma_j$ ו־

$$\operatorname{Res}\{g;\sigma_j\} = \frac{p(\sigma_j)}{q'(\sigma_j)}.$$

נחזור כעת לבעיית חישוב האינטגרל שבנוסחת ההתמרה ההפוכה. נניח ש־ $F(\sigma)$ אנליטית בתחום $\operatorname{Re}(\sigma)>a$, ויהי $s>a$. אנו מעוניינים לחשב את

$$f(t) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma, \qquad t>0.$$

כאמור, לא קיימת שיטה אחת לחישוב אינטגרל זה עבור כל פונקציה $F(\sigma)$. בתנאים מסוימים על $F(\sigma)$ נוכל לחשב אותו. נניח ש־ $F(\sigma)$ אנליטית בכל המישור מלבד מספר סופי של נקודות σ_1, σ_2, ... , σ_n, ולפי ההנחה

$$\operatorname{Re}(\sigma_j)<a, \qquad j=1,2,\ldots,n.$$

יהי $s>a$ ויהי $R>0$ מספר ממשי מספיק גדול כך שחצי המעגל השמאלי Γ_R אשר מרכזו בנקודה $(s,0)$ ורדיוסו R יכלול בתוכו את כל הנקודות σ_1, σ_2, ... , σ_n. נחלק את העקום Γ_R לשני העקומים הבאים

$$I_R = \{\sigma\in\mathbb{C} \mid \sigma = s+iv, \quad -R<v<R\}$$
$$C_R = \{\sigma\in\mathbb{C} \mid |\sigma-s|=R, \quad \operatorname{Re}(\sigma)\le s\}$$

כפי שרואים בציור **4.3**. על סמך משפט הרזידואום

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left\{e^{\sigma t}F(\sigma);\sigma_j\right\}.$$

האגף הימני אינו תלוי ב־ R, כל עוד R מספיק גדול, ומאחר ש־ $\Gamma_R = C_R\cup I_R$, הרי ש־

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{I_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma.$$

ברור כי

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{I_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma$$

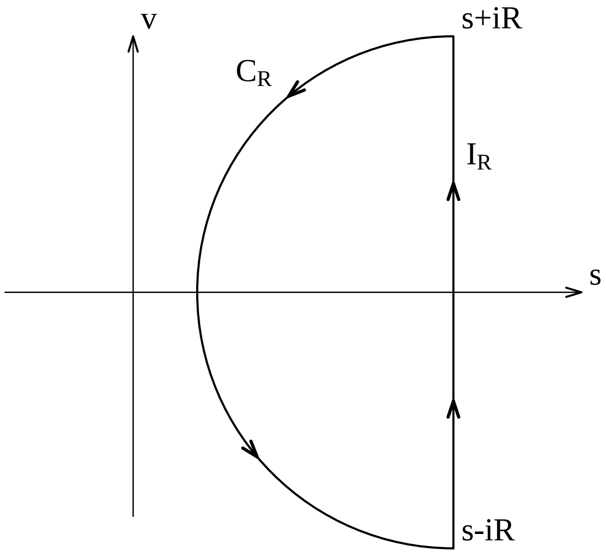
ולכן אם מתקיים

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = 0 \tag{4.9}$$

אז נקבל את הנוסחה

$$.f(t) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left\{e^{\sigma t}F(\sigma);\sigma_j\right\}$$

לרוע המזל, שוויון **(4.9)** אינו מתקיים לכל F. ננסח תנאי מסוים אשר תחתיו F תקיים את **(4.9)**.



ציור 4.3

משפט 4.10: תהי F פונקציה אנליטית במישור המרוכב, פרט אולי למספר סופי של נקודות. יהי C_R כנ"ל. אם

$$\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)| = 0$$

אזי

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = 0$$

מתקיים לכל $t>0$.

לשם הוכחת המשפט נזדקק ללמה של ג'ורדן (Jordan's Lemma).

הלמה של ג'ורדן:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta < \frac{\pi}{2R}$$

הוכחה: לכל $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, מתקיים אי-השוויון

$$\frac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \,.$$

סיבה לכך היא ש- $\frac{2\theta}{\pi}$ עבור $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ הוא קו ישר שמתחיל בנקודה $(0,0)$ ומסתיים בנקודה $(\frac{\pi}{2}, 1)$. גם לגרף של $\sin\theta$ בקטע זה אותן נקודות קצה, אך הגרף קעור בקטע, ולכן נמצא מעל הקו הנ"ל. מאי-שוויון זה נובע כי

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\,d\theta = -\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) < \frac{\pi}{2R}$$

■

הוכחת משפט 4.10: העקום C_R נתון על ידי

$$C_R = \{\sigma \in \mathbb{C} \mid |\sigma - s| = R, \quad \mathrm{Re}(\sigma) \le s\}$$

$$= \left\{\sigma \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sigma = s + Re^{i\theta}, \quad \tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{3\pi}{2}\right\}$$

לכל $\sigma \in \mathbb{C}$,

$$\left|e^{\sigma t}\right| = \left|e^{(s+Re^{i\theta})t}\right| = e^{st}\left|e^{Rte^{i\theta}}\right| = e^{st}e^{Rt\cos\theta} = e^{st}e^{-Rt\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}\,.$$

לכן

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\left|e^{\sigma t}\right||F(\sigma)||d\sigma|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|\int_{C_R}\left|e^{\sigma t}\right||d\sigma|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{st}e^{-Rt\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}R\,d\theta$$

בשלב הסופי השתמשנו בעובדה ש- $\sigma = s + Re^{i\theta}$ בכדי להסיק כי $d\sigma = iRe^{i\theta}d\theta$, ולכן $|d\sigma| = R\,d\theta$. לכן

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|Re^{st}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-Rt\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}\,d\theta\,.$$

על ידי ההצבה $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$ נקבל כי

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-Rt\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}\,d\theta = \int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi}\,d\varphi\,.$$

הפונקציה $\sin\varphi$ היא פונקציה זוגית סביב הנקודה $\frac{\pi}{2}$. בנוסף $Rt > 0$ ולכן, מהלמה של ג'ורדן, נקבל

$$\int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi}\,d\varphi < \frac{\pi}{Rt}\,.$$

לכן, בשלב הנוכחי יש בידנו את אי-השוויון

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)|\frac{\pi e^{st}}{t}\,.$$

מכאן שאם $\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)| = 0$, אזי

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = 0$$

מתקיים לכל $t > 0$. סיימנו את הוכחת המשפט. ■

המסקנה המיידית ממשפט זה היא אם כן: אם F אנליטית בכל $\mathbb{C}$, פרט אולי למספר סופי של נקודות σ_1, σ_2, ..., σ_n, כך ש־ $\mathrm{Re}(\sigma_j) < s$, לכל $1 \le j \le n$, ואם

$$\lim_{R\to\infty}\max_{\sigma\in C_R}|F(\sigma)| = 0$$

אזי ההתמרת לפלס ההפוכה של $F(s)$ היא

$$f(t) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}\left\{e^{\sigma t}F(\sigma);\sigma_j\right\} \qquad (4.10)$$

דוגמא 4.27: נחשב את ההתמרה ההפוכה של $F(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}$ בשתי שיטות שונות. מאחר ו־

$$F(s) = \frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

נקבל מייד מן הנוסחאות הידועות לנו כי

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)\right](t) = e^{2t} - e^t.$$

עתה נחשב את $f(t)$ באמצעות הנוסחה שקבלנו לעיל.

מן ההערה שאחרי הוכחת משפט **4.8** נובע כי $F(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2-3\sigma+2}$, כאשר $\sigma \in \mathbb{C}$. ל־ $F(\sigma)$ יש שני קטבים פשוטים $\sigma_1 = 1$ ו־ $\sigma_2 = 2$ ולכן

$$f(t) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t} \frac{1}{\sigma^2 - 3\sigma + 2}\, d\sigma$$

לכל $s > 2$. נבחר למשל את $s = 3$. לכן

$$C_R = \{\sigma \in \mathbb{C} \mid |\sigma - 3| = R, \quad \mathrm{Re}(\sigma) \le 3\}.$$

עלינו לבדוק ש־ $\lim_{R\to\infty} \max_{\sigma\in C_R} |F(\sigma)| = 0$, לפני שנוכל להשתמש בתוצאה לעיל.

$$\max_{\sigma\in C_R} |F(\sigma)| = \max_{\sigma\in C_R} \left| \frac{1}{(\sigma-1)(\sigma-2)} \right|$$

וברור שאם $R = |\sigma - 3|$ ישאף לאינסוף אז גם $|\sigma - 1|$ ו־ $|\sigma - 2|$ ישאפו לאינסוף, ולכן

$$\lim_{R\to\infty} \max_{\sigma\in C_R} \frac{1}{|(\sigma-1)(\sigma-2)|} = 0\,.$$

אזי

$$\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} e^{\sigma t} \frac{1}{\sigma^2 - 3\sigma + 2}\, d\sigma \\
&= \mathrm{Res}\left\{ \frac{e^{\sigma t}}{(\sigma-1)(\sigma-2)}; \sigma = 1 \right\} + \mathrm{Res}\left\{ \frac{e^{\sigma t}}{(\sigma-1)(\sigma-2)}; \sigma = 2 \right\} \\
&= \left. \frac{e^{\sigma t}}{\sigma - 2} \right|_{\sigma=1} + \left. \frac{e^{\sigma t}}{\sigma - 1} \right|_{\sigma=2} \\
&= \frac{e^t}{1-2} + \frac{e^{2t}}{2-1} = -e^t + e^{2t}
\end{aligned}$$

וקבלנו תוצאה זהה לזו שבשיטה הראשונה.

לפני שנראה דוגמאות נוספות, נביא עוד עובדה אחת חשובה.

משפט 4.11: אם $F(\sigma) = \frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}$, כאשר P ו־ Q פולינומים כך שמעלת P קטנה ממעלת Q, אזי

$$\lim_{R\to\infty} \max_{\sigma\in C_R} |F(\sigma)| = 0$$

כאשר $C_R = \{\sigma \in \mathbb{C} \mid |\sigma - s| = R, \quad \mathrm{Re}(\sigma) \le s\}$ ו־ s הוא מספר ממשי כלשהו.

הוכחה: נניח ש־ $\deg(P) = m$ ו־ $\deg(Q) = n$, ויהי $k = n - m > 0$. לא קשה להוכיח שקיימים $M > 0$ ו־ $c > 0$ כך שלכל $|\sigma| \geq M$ מתקיים

$$\left|\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}\right| \leq \frac{c}{|\sigma|^k}.$$

לכן, לכל $R \geq |s| + M$ ולכל $\sigma \in C_R$ יתקיים $|\sigma| \geq M$ ולכן

$$|F(\sigma)| = \left|\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}\right| \leq \frac{c}{|\sigma|^k}.$$

מכאן נובעת תוצאת המשפט. ∎

דוגמא 4.28: לגבי הפונקציה $u_c(t)$, $c > 0$, הוכחנו כי

$$\mathfrak{L}[u_c](s) = \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0.$$

לכן אם נגדיר $F(s) = \frac{e^{-cs}}{s}$ אזי $F(\sigma) = \frac{e^{-c\sigma}}{\sigma}$. ממשפט **4.9** נקבל את הנוסחה

$$u_c(t) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} \frac{e^{\sigma t} e^{-c\sigma}}{\sigma}\, d\sigma, \qquad 0 < t \neq c.$$

בניגוד לדוגמא הקודמת, לא נוכל להשתמש בנוסחה **(4.10)** בכדי לקבל חזרה את $u_c(t)$! זה משום שהפונקציה $\frac{e^{c\sigma}}{\sigma}$ אינה מקיימת את התנאי של משפט **4.10**. קל לבדוק כי

$$\lim_{R\to\infty} \max_{\sigma\in C_R} \left|\frac{e^{-c\sigma}}{\sigma}\right| = \infty.$$

נבחר את $\sigma = s - R$, ולכן

$$\max_{\sigma\in C_R} \left|\frac{e^{-c\sigma}}{\sigma}\right| \geq \frac{e^{cR} e^{-cs}}{|s - R|}.$$

מאחר ו־ $c > 0$, הרי שאגף ימין שואף לאינסוף כאשר R שואף לאינסוף. לא נוכל להשתמש בנוסחה **(4.10)** בכדי למצוא את ההתמרה ההפוכה. השימוש בנוסחה זו מוביל במקרה זה לתוצאה לא נכונה. לפונקציה $\frac{e^{-c\sigma}}{\sigma}$ יש קוטב פשוט יחיד בנקודה $\sigma = 0$, ולכן

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{\sigma t} e^{-c\sigma}}{\sigma}; \sigma = 0\right\} = 1$$

לכל ערך של t, וזו כמובן איננה הפונקציה $u_c(t)$. דוגמא זו הובאה בכדי להזהיר את הקורא מפני שימוש לא נכון ב־ **(4.10)**.

דוגמא 4.29: נחשב עכשיו את התמרת לפלס ההפוכה של $F(s) = \frac{1}{s^3-1}$. ברור כי $F(\sigma) = \frac{1}{\sigma^3-1}$ ושתנאי של משפט **4.10** מתקיימים, ולכן נוכל להשתמש בנוסחה **(4.10)**. נסמן $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)$. אזי

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left\{\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^3-1}; \sigma_j\right\}.$$

כאשר $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, ו־ σ_n הם הקטבים של $\frac{1}{\sigma^3-1}$. כאן יש שלושה קטבים פשוטים: 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, ולגבי כל אחד מהם ניתן למצוא ש־

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{\sigma t}}{\sigma^3-1}; \sigma_j\right\} = \frac{e^{\sigma_j t}}{3\sigma_j^2}.$$

לכן

$$f(t) = \frac{e^t}{3\cdot 1^2} + \frac{e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t}}{3\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}}{3\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

על ידי חישובים נוספים נוכל לעבור לצורה הבאה של f

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^t}{3} + \frac{(-1+i\sqrt{3})}{6}e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t} + \frac{(-1-i\sqrt{3})}{6}e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t} \\ &= \frac{e^t}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{aligned}$$

קיימת דרך נוספת שעושה שימוש בפירוק לשברים פשוטים בכדי למצוא את f. נשאיר את מציאתה כתרגיל לקורא.

תרגילים

1. על ידי שימוש בנוסחת ההתמרה ההפוכה, חשב את

א. $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\cosh a\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right]$, $0 < a < 1$

ב. $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+s^2)^2}\right]$

ג. $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3(1+s^2)}\right]$

ד. $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{(1+s^2)^3}\right]$

ה. $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\sqrt{1+s}}\right]$

ו. $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{s}}{s-1}\right]$

ז. $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(e^s+1)}\right]$

ח. $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2(s^2+4)}\right]$

תרגילים לחזרה כללית

1. תהי $f(t)=\int_0^\infty \frac{u\sin ut}{1+u^2}\,du$.

א. חשב את ההתמרת לפלס של f.

ב. חשב את f.

2. עבור קבוע $c>0$ תהי f_c הפונקציה המחזורית $2c$ בקטע $[0,\infty)$, אשר בקטע $[0,2c]$ נתונה על ידי

$$f_c(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le c \\ 2c-t, & c\le t\le 2c \end{cases}.$$

חשב את ההתמרת לפלס של f_c.

3. תהי f פונקציה כך ש־ $\frac{f(t)}{t}$ רציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$, וקיימים קבועים K ו־ a כך ש־

$$|f(t)|\le Kte^{at}, \qquad t\ge 0.$$

הוכח שלכל $s>a$,

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s)=\int_s^\infty \mathcal{L}[f](u)\,du$$

4. הוכח כי ההתמרת לפלס של $\frac{1-e^{-t}}{t}$ שווה ל־ $\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$.

5. פתור את המשוואה האינטגרלית

$$f(t)-\frac{1}{6}\int_0^t (t-y)^3 f(y)\,dy=t^2.$$

6. יהיו f ו־ g פונקציות גזירות ברציפות, כך שהן ונגזרותיהן אינטגרבילות בהחלט בקטע $[0,\infty)$, ו־ $f(0)=g(0)=0$. הוכח כי

$$(f*g)'=f'*g=f*g'.$$

7. חשב את ההתמרת לפלס של הפונקציות

א. $\int_0^t (t-y)^2\cos 2y\,dy$ ב. $\int_0^t \sin(t-y)\cos y\,dy$

8. פתור את המשוואה הדיפרנציאלית

$$y''+2y'+2y=\sin at, \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

כאשר a הוא קבוע נתון.

9. מצא את ההתמרת לפלס ההפוכה של $\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$.

10. על ידי שימוש בהתמרת לפלס, פתור את המערכות הבאות:

א.

$$\begin{cases} u_x + 2xu_t = 2x & (0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = 1 & (0 \leq x < \infty) \\ u(0,t) = 1 & (0 \leq t < \infty) \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} xu_x + u_t = xt & (0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = 0 & (0 \leq x < \infty) \\ u(0,t) = 0 & (0 \leq t < \infty) \end{cases}$$