פרק 5

התמרת פוריה

5.1 מבוא: מדוע אותות אקספוננציאליים?

אות אקספוננציאלי הוא "אות עצמי" של מערכות לינאריות קבועות בזמן (לק"ב). כלומר, אם הכניסה למערכת לק"ב היא אות מהצורה $x(t) = e^{st}$ (כאשר s הוא מספר מרוכב), אזי התגובה גם היא אות מאותה צורה, כלומר התגובה תהיה $H(s)e^{st}$ עבור קבוע מרוכב $H(s)$. קל לבדוק עובדה זו עבור פתרון פרטי של מד"ר. ננחש שעבור כניסה $x(t) = e^{st}$ יש פתרון פרטי מהצורה $y_p(t) = H(s)e^{st}$. נציב במשוואה ונבדוק.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{5.1.1}$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n H(s)e^{st}}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m e^{st}}{dt^m} \tag{5.1.2}$$

$$H(s)\sum_{n=0}^{N} a_n s^n e^{st} = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m e^{st} \tag{5.1.3}$$

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m e^{st}}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n e^{st}} \ . \tag{5.1.4}$$

מסקנה: אכן קיים פתרון פרטי כזה, בתנאי שהמכנה אינו אפס, כלומר בתנאי ש-s איננו שורש של הפולינום האפייני של המד"ר.

עבור מערכת קונוולוציה, נחשב את היציאה:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \tag{5.1.5}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)\,d\tau \tag{5.1.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{st}e^{-s\tau}h(\tau)\,d\tau \tag{5.1.7}$$

$$= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}h(\tau)\,d\tau \tag{5.1.8}$$

$$= e^{st}H(s). \tag{5.1.9}$$

ושוב הגענו לתוצאה כי התגובה היא קבוע כפול אות הכניסה. כמובן שאם אותה מערכת מוגדרת גם דרך מד"ר וגם כמערכת קונוולוציה, אזי הפונקציה $H(s)$ חייבת להיות פונקציה אחת, הקשורה למערכת. הפונקציה $H(s)$ נקראת פונקצית התמסורת, ונלמד עליה בהמשך בהקשר של התמרת לפלס. בהקשר של מד"ר אנו רואים כי פונקציה זו היא תמיד מנה של שני פולינומים, ובקשר של מערכות קונוולוציה זוהי התמרת לפלס דו צדדית של תגובת ההלם (או גרעין הקונוולוציה). בפרט, אם $s = j\omega$ כאשר ω הוא מספר ממשי, אזי אות הכניסה הוא אות הרמוני, ואת ω ניתן לפרש כתדר זויתי. ל-$H(j\omega)$ אנו קוראים תגובת התדר של המערכת, מכיון שאם הכניסה היא אות הרמוני $e^{j\omega t}$ אזי התגובה לאות בתדר זה היא האות המקורי, המוכפל בקבוע שהוא תגובת התדר. הגדרת $H(j\omega)$ על ידי (5.1.8)--(5.1.9) היא בדיוק התמרת פוריה של תגובת ההלם h. עובדה זו מובילה אותנו לניתוח במישור התדר של מערכות ליניאריות---דבר בעל משמעות פיזיקלית ואינטואיטיבית.

5.2 התמרת פוריה

עבור פונקציות ב-L_1 (הגדרה 4.1.2) נגדיר את התמרת פוריה דרך אינטגרל פוריה

$$\mathcal{F}\{x\}(\omega) = X(\omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{5.2.1}$$

אם $X(\omega)$ גם הוא ב-L_1 אזי נגדיר את התמרת פוריה ההפוכה

$$\mathcal{F}^{-1}\{X\}(t) = \hat{x}(t) \doteq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{5.2.2}$$

הסיבה לסימון $\hat{x}$ היא שלא מובטח לנו שההתמרה ההפוכה מחזירה את האות המקורי. הקשר בין x לבין $\hat{x}$ הוא מורכב וחשוב להבינו לעומק. חשוב להדגיש כי האינטגרל הוא דרך לחישוב התמרת פוריה, אך אינו הדרך היחידה להגדיר את ההתמרה. זוהי דרך תקפה רק לאותות ב-L_1, ובפרט האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,dt$$

אינו מוגדר כלל, וממילא אינו מגדיר את ההתמרה של האות 1 (האות השווה 1 לכל t).

אנו נשתמש בסימונים הבאים. $\mathcal{F}[x](\omega)$ היא התמרת פוריה של האות x. את הקשר ביניהם נסמן כך $x \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X$. נשים לב כי קשר זה אינו סימטרי כיוון ש-$x \neq \mathcal{F}[X]$, ולכן יש חשיבות לכך שהאות העיתי (פונקציה של המשתנה t) מופיע בצד שמאל וההתמרה, שהיא פונקציה של משתנה התדר, מופיעה בצד ימין.

5.3 חזרה

בסעיף זה נחזור על חומר מקורס טורי פוריה והתמרות אינטגרליות. עקב כך לא נציין את כל התנאים המתמטיים. בסעיף זה נניח שכל האותות הם ב-L_1 וגם ב-L_2. בסעיף הבא נרחיב לאותות שאינם מקיימים תנאים אלו.

משפט 5.3.1 אם x הוא אות ב-L_2 אזי יש לו התמרת פוריה שנסמן ב-X. ל-X יש התמרה הפוכה שנסמן ב-$\hat{x}$, ומתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 \, dt = 0 \,. \tag{5.3.1}$$

משפט זה הוא מופשט למדי, אך בהמשך נעמיק בו יותר. ישנם תנאים שונים המבטיחים כי ההתמרה מוגדרת בכל נקודה, וההתמרה ההפוכה מחזירה את האות המקורי.

משפט 5.3.2 תנאי דיריכלה. אם $x \in L_1$ אזי התמרת פוריה שלו מוגדרת היטב ו-$X(\omega)$ חסום. אם בנוסף $X \in L_1$ ומתקיימים התנאים הבאים:

1. האות x הוא בעל מספר סופי של נקודות מקסימום ומינימום בכל קטע זמן סופי,
2. האות x הוא בעל מספר סופי של נקודות אי רציפות בכל קטע זמן סופי,

אזי

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2}[x(t^-) + x(t^+)] \,. \tag{5.3.2}$$

כלומר, ההתמרה ההפוכה שווה לאות המקורי בכל נקודת רציפות, ושווה לממוצע הערכים בנקודות אי רציפות.

הוכחה: נוכיח רק את הטענה הראשונה: ההתמרה מוגדרת היטב, וכן

$$|X(\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-j\omega t} \right| |x(t)| \, dt = ||x||_1 \,. \tag{5.3.3}$$

מ.ש.ל.

5.3.1 תכונות ההתמרה:

משפט 5.3.3 התמרת פוריה היא פעולה לינארית:

$$ax_1 + bx_2 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1 + bX_2 \,. \tag{5.3.4}$$

הוכחה: עבור המקרה שההתמרה מוגדרת דרך האנטגרל---נובע מלינאריות האנטגרל. מ.ש.ל.

משפט 5.3.4 תכונות סימטריה של התמרת פוריה. אם $x(t) = x^*(t)$, כלומר הוא ממשי, אזי $X(\omega) = X^*(-\omega)$ כלומר הוא זוגי (במובן המרוכב).

אם x הוא זוגי (במובן המרוכב), כלומר $x^*(t) = x(-t)$, אזי $X(\omega)$ הוא ממשי.

אם $x(t) = x(-t)$ (סימטרי במובן הממשי) אזי $X(\omega) = X(-\omega)$. אם $x(t) = -x(-t)$ (אנטי סימטרי במובן הממשי) אזי $X(\omega) = -X(-\omega)$.

הוכחה: אם x ממשי אזי

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{5.3.5}$$

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\,dt \tag{5.3.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt\,. \tag{5.3.7}$$

הוכחת שאר התכונות דומה. מ.ש.ל.

משפט 5.3.5 להתמרת פוריה ישנן התכונות הבאות. הזזה בזמן

$$x(t-\tau) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)e^{-j\omega\tau}\,. \tag{5.3.8}$$

הזזה בתדר

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega-\omega_0) \tag{5.3.9}$$

גזירה (במישור הזמן)

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\omega X(\omega)\,. \tag{5.3.10}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j\omega)^n X(\omega)\,. \tag{5.3.11}$$

קונוולוציה (במישור הזמן)

$$(x*y)(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)Y(\omega)\,. \tag{5.3.12}$$

קונוולוציה (במישור התדר) או כפל במישור הזמן

$$x(t)y(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}(X*Y)(\omega)\,. \tag{5.3.13}$$

שינוי סקלת זמן (או תדר)

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)\,. \tag{5.3.14}$$

פוריה חזרה

משפט 5.3.6 דואליות *Duality*. תחת תנאים טכניים מתאימים, אם $f = \mathcal{F}[g]$ אזי $\mathcal{F}[f](\omega) = 2\pi g(-\omega)$.
באופן כללי יותר,

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}[h]\right)(u) = 2\pi h(-u)\,, \qquad \mathcal{F}^4[h] = 4\pi^2 h\,. \tag{5.3.15}$$

הוכחה: מההגדרה

$$\mathcal{F}[f](u) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-jus}\, ds \tag{5.3.16}$$
$$= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{j(-u)s}\, ds \tag{5.3.17}$$
$$= 2\pi \left(\mathcal{F}^{-1}[f]\right)(-u) \tag{5.3.18}$$
$$= 2\pi g(-u)\,. \tag{5.3.19}$$

מכאן נובעת גם השורה השניה. מ.ש.ל.

משמעות הנוסחה האחרונה היא כי הפעלה של $\mathcal{F}$ בחזקה רביעית היא---עד כדי כפל בקבוע---העתקת הזהות: היא מחזירה את האות המקורי. מכאן נובע מיידית כי

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{\mathcal{F}^3}{4\pi^2}\,. \tag{5.3.20}$$

משפט 5.3.7 (פלנשרל *Plancherel*). לכל x, y ב-L_2,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega)\, d\omega\,. \tag{5.3.21}$$

תכונה זו מגדירה את $X(\omega)$ במובן הבא. בהנתן $x(t) \in L_2$ ו-$Z(\omega)$, אם לכל $y \in L_2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) Y^*(\omega)\, d\omega \tag{5.3.22}$$

אזי בהכרח $Z \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} x$. בפרט, את האנרגיה של האות ניתן לחשב בתחום הזמן או בתחום התדר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega\,. \tag{5.3.23}$$

הערה: מכיוון שאין לנו נוסחה לחישוב התמרת פוריה עבור אותות ב-L_2, המשפט נותן לנו תחליף: שיטה לבדוק אם מועמד מסויים הוא אכן התמרת פוריה. בהמשך נראה כי אפשר להשתמש בהגדרה דומה 5.4.1 גם לצורך חישוב ההתמרה.

הוכחה (של (5.3.22) ו-(5.3.23) בלבד): עבור x, y שהם ב-L_2 וגם ב-L_1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]^* dt \tag{5.3.24}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}x(t)\,dt\right]d\omega \tag{5.3.25}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(\omega)X(\omega)\,d\omega\,. \tag{5.3.26}$$

ניתן להרחיב זאת לאותות שאינם בהכרח ב-L_1 על ידי קרובים. את הטענה השניה לא נוכיח כאן. מ.ש.ל.

משפט זה מראה כי את האנרגיה של אות ניתן לחשב גם דרך מישור הזמן, אך גם דרך האות במישור התדר. מכאן ש-$X(\omega)$ מתאר את "גודל" האות בתדר ω. בהמשך נראה כי נוסחה זו היא המפתח להתמרת פוריה הכללית יותר.

5.4 התמרת פוריה לפונקציות מוכללות

ראשית יש להדגיש כי ניתן לפרש פונקציות רגילות כפונקציות מוכללות: כך למשל פונקצית המדרגה u איננה ב-L_1 וגם לא ב-L_2. לכן לא ניתן להפעיל עליה את נוסחת האינטגרל להתמרת פוריה. כמובן שהבחנה זו נכונה גם לפונקציות מוכללות.

למרות שההגדרה דרך האינטגרל איננה אפשרית, מסתבר שניתן להגדיר התמרת פוריה גם לפונקציות מוכללות. לצורך ההגדרה, נשים לב כי אם f היא פונקציה ב-L_1 ו-ϕ היא פונקצית בחן של המשתנה ω, אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\phi(\omega)\,d\omega\,dt \tag{5.4.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\phi(\omega)\,d\omega\right) dt \tag{5.4.2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt. \tag{5.4.3}$$

נשים לב כי התמרת פוריה של פונקצית בחן היא בעצמה פונקצית בחן. קשר זה אשר הוכחנו עבור פונקציות ב-L_1 משמש למעשה הגדרה של התמרת פוריה של פונקציה מוכללת.

הגדרה 5.4.1 התמרת פוריה של פונקציה מוכללת f של המשתנה t היא פונקציה מוכללת של המשתנה ω, אשר נסמן ב-$\mathcal{F}(f)$, והיא מוגדרת דרך פעולתה על פונקציות בחן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt. \tag{5.4.4}$$

צד שמאל של המשוואה מתאר את הפעולה של הפונקציה המוכללת אשר קיבלנו על ידי התמרת פוריה של f; זאת על ידי בדיקת פעולתה על פונקצית בחן. צד ימין מוגדר היטב שכן הוא בדיוק הפעולה של הפונקציה המוכללת f על פונקצית בחן.

הערה מתמטית: כדי לוודא שהתמרת פוריה של פונקציה מוכללת היא אכן פונקציה מוכללת עלנו לבדוק שני דברים: לינאריות ורציפות. בנקודה השניה לא נדון כאן, אולם הלינאריות היא מיידית שכן האנטגרל של התמרת פוריה הוא לינארי, לכן צד ימין של ההגדרה לינארי ולכן גם צד שמאל.

כיוון שהגדרנו התמרת פוריה דרך תכונות של ההתמרה האינטגרלית, כל תכונות התמרת פוריה נשמרות. בפרט, יש קשר חד חד ערכי בין פונקציה לבין התמרת פוריה שלה, במובן של ההגדרה (ראינו בהקשר של תנאי דיריכלה שהקשר אינו ביחס לערך בכל נקודה).

דוגמה 5.4.2 נחשב את התמרת פוריה של פונקצית הלם:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\delta\}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\phi(\omega)\,d\omega\,dt \tag{5.4.5}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t)\,dt\,d\omega \tag{5.4.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)\cdot 1\,d\omega, \tag{5.4.7}$$

ולכן התמרת פוריה של דלתה היא הפונקציה 1, כלומר הפונקציה השווה 1 לכל t.

בכוון ההפוך, נחשב את התמרת פוריה של הפונקציה 1.

דוגמה 5.4.3 כדי לחשב את התמרת פוריה של הפונקציה 1 נתייחס אליה כאל פונקציה מוכללת. נשתמש בהגדרה ונקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{1\}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt \tag{5.4.8}$$

$$= 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\cdot 0\cdot t}\cdot\mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt \tag{5.4.9}$$

$$= 2\pi\phi(0) \tag{5.4.10}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)\phi(\omega)\,d\omega \tag{5.4.11}$$

כאשר השוויון הלפני האחרון התקבל כי זו התמרה הפוכה של ההתמרה של ϕ בנקודה $\omega = 0$; כיוון ש-ϕ היא פונקצית בחן, ההתמרה ההפוכה של ההתמרה נותנת את הערך המקורי של הפונקציה. השוואה של האיבר הראשון לאחרון מראה כי $\mathcal{F}\{1\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$.

מתכונת ההזזה בזמן והתמרת פוריה של 1 נקבל

$$\mathcal{F}\left(e^{j\omega_0 t}\right)(\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\,. \tag{5.4.12}$$

כיוון ש-

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \tag{5.4.13}$$

נקבל מתכונת הלינאריות של ההתמרה כי

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0\cdot)](\omega) = \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]\,. \tag{5.4.14}$$

דוגמה 5.4.4 נחשב את ההתמרה של $x(t) = t^n$. כמובן שזוהי פונקציה מוגדרת היטב, אך היא בוודאי אינה ב-L_1, ולכן לא ניתן להשתמש בנוסחה האינטגרלית לחישוב ההתמרה. מהגדרה (5.4.4) נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x\}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt \tag{5.4.15}$$

$$= (-j)^n \int_{-\infty}^{\infty} (jt)^n \mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt. \tag{5.4.16}$$

אולם ראינו כי $(jt)^n\mathcal{F}\{\phi\}(t)$ היא התמרת פוריה של $\frac{d^n}{d\omega^n}\phi(\omega)$. לכן, כמו בדוגמה הקודמת,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x\}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = (-j)^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{d\omega^n}\phi\right\}(t)\,dt \tag{5.4.17}$$

$$= (-j)^n 2\pi \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j0t}\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{d\omega^n}\phi\right\}(t)\,dt \tag{5.4.18}$$

$$= 2\pi(-j)^n\phi^{(n)}(0) \tag{5.4.19}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega \tag{5.4.20}$$

ומהשוואת הביטוי הראשון והאחרון קיבלנו $\mathcal{F}\{t^n\} = 2\pi j^n\delta^{(n)}$.

משפט 5.4.5 התמרת פוריה של פונקציה מוכללת היא פונקציה מוכללת. ההתמרה מוגדרת דרך *5.4.1* ויש לה את התכונות של התמרת פוריה המופיעות במשפטים *5.3.3*, *5.3.4*, *5.3.5* ו-*5.3.6*. הקשר בין הפונקציה וההתמרה הוא חד חד ערכי כלומר לכל פונקציה יש התמרה יחידה ולכל התמרה מתאימה פונקציה אחת. היחידות היא במובן של פונקציות מוכללות.

האות $x(t) = \mathrm{sign}(t)$ איננו ב-L_1 ולכן לא ניתן לחשב את ההתמרה דרך אינטגרל פוריה. כיוון שזהו אות בסיסי ומהווה נקודת מוצא לחישובים אחרים, ננסה לתאר את חישוב ההתמרה שלו. הפיתוח המתמטי המדויק הוא מורכב, ולא נתאר אותו כאן.
ראשית, נשים לב כי מהתכונה

$$\mathcal{F}\left(\frac{dx}{dt}\right)(\omega) = j\omega X(\omega) \tag{5.4.21}$$

נובע כי אם מתקיים

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \tag{5.4.22}$$

אזי $j\omega X(\omega) = j\omega Y(\omega)$ לכל $\omega \neq 0$. השוויון של הנגזרות מבטיח כי $x(t) - y(t) = c$ הוא קבוע שאינו תלוי ב-t. יתרה מכך, אם ידועה לנו התמרת פוריה של הנגזרת, נאמר

$$\mathcal{F}\left(\frac{dx}{dt}\right)(\omega) = Y(\omega) \tag{5.4.23}$$

אזי בהכרח, עבור כל $\omega \neq 0$

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}Y(\omega) + Z(\omega) \tag{5.4.24}$$

כאשר $Z(\omega)$ מתאפס לכל $\omega \neq 0$. כמובן שפירוש הדבר הוא כי $Z(\omega)$ הוא או 0, או שהוא פונקציה מוכללת שהשפעתה היא רק סביב 0, דוגמת δ ונגזרותיה.

עבור אות אנטי-סימטרי ואינטגרבילי,

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\cdot 0\cdot t} x(t)\, dt = 0 \tag{5.4.25}$$

עקב האנטי-סימטריה. לכן אנו מצפים כי תכונה זו תהיה תקפה גם עבור אותות אנטי-סימטריים שאינם אינטגרבילים. בפרט,

$$\mathcal{F}[\mathrm{sign}](0) = 0\,. \tag{5.4.26}$$

מתוך תכונת הנגזרת,

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{sign}\right)(\omega) = \mathcal{F}(2\delta) = 2\,. \tag{5.4.27}$$

מכאן נובע כי

$$\mathcal{F}(\mathrm{sign})(\omega) = \frac{2}{j\omega} \tag{5.4.28}$$

כאשר בגלל תכונת האנטי סימטריה מובטח לנו שאין צורך להוסיף תיקון, כלומר $Z(\omega) = 0$.

כיוון שפונקצית המדרגה מקיימת

$$u(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(t) + 1) \tag{5.4.29}$$

נובע מהלינאריות של התמרת פוריה ומההתמרה של 1 כי

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{j\omega} + 2\pi\delta(\omega)\right) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\,. \tag{5.4.30}$$

את התוצאה וכן מסקנה חשובה ממנה נסכם:

משפט 5.4.6 עבור פונקצית המדרגה ופונקצית הסימן מתקיים

$$\mathcal{F}(\mathrm{sign})(\omega) = \frac{2}{j\omega} \tag{5.4.31}$$

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \tag{5.4.32}$$

התמרה של אינטגרל

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right) = \frac{X(\omega)}{j\omega}\mathbf{1}_{\{\omega\neq 0\}} + \pi X(0)\delta(\omega)\,. \tag{5.4.33}$$

הוכחה: נוכיח רק את הביטוי האחרון. מתכונת הקונוולוציה,

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right)(\omega) = \mathcal{F}(x * u)(\omega) \tag{5.4.34}$$

$$= X(\omega)\cdot\mathcal{F}(u)(\omega) \tag{5.4.35}$$

$$= X(\omega)\cdot\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] \tag{5.4.36}$$

$$= \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)\,. \tag{5.4.37}$$

מ.ש.ל.

5.5 פוריה, אותות ומערכות

נתבונן שוב בהגדרה האינטגרלית (5.2.2) של התמרת פוריה הפוכה. נזכר כי אינטגרל אינו אלא קירוב לסכום:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega)e^{jk\Omega t}\Omega\,. \tag{5.5.1}$$

כלומר פירקנו את האות x לאוסף של פונקציות הרמוניות מהצורה $e^{jk\Omega t}$ כאשר המקדם של הפונקציה ההרמונית בתדר $k\Omega$ הוא בדיוק $X(k\Omega)$---הערך של התמרת פוריה בתדר זה. אם כך, ככל שהערך של $X(\omega)$ גדול יותר בתדר מסויים, כך ניתן לומר כי לאות מרכיב גדול בתדר זה. בכיוון ההפוך, אם $X(\omega_0) = 0$ אזי ל-x אין אנרגיה בתדר זה.

כפי שראינו בסעיף 5.1 תגובת מערכת קונוולוציה לאות הרמוני מהצורה $e^{j\omega t}$ היא

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}\,. \tag{5.5.2}$$

ל-H אנו קוראים תגובת התדר של המערכת משום שהיא מתארת את הגודל של תגובת המערכת לאותות הרמוניים בתדרים השונים. באופן כללי יותר ראינו כי התגובה לכניסה x היא

$$y(t) = (x * h)(t) \tag{5.5.3}$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{5.5.4}$$

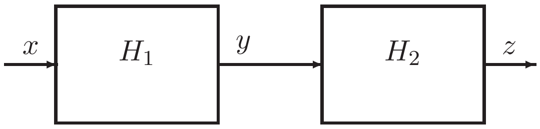
כאשר H היא התמרת פוריה של גרעין הקונוולוציה, שהוא תגובת ההלם.

התמרת פוריה נותנת לנו כלי נוח לנתח חיבורים של מערכות. כיוון שהקשר בין כניסה ויציאה הוא אלגברי

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{5.5.5}$$

קל יחסית לנתח גם חיבורים מורכבים.

דוגמה 5.5.1 חיבור מערכות בטור מתואר על ידי השרטוט המצורף. נקבל מייד כי



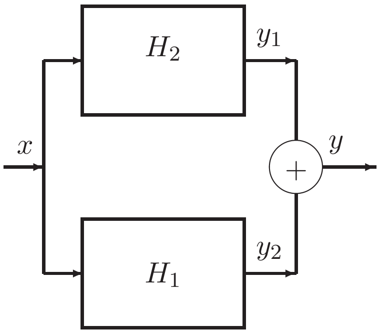
איור 5.1: חיבור מערכות בטור

$$Z(\omega) = H_2(\omega)Y(\omega) \tag{5.5.6}$$
$$= H_2(\omega)H_1(\omega)X(\omega) \tag{5.5.7}$$

ולכן תגובת התדר של המערכת הכוללת היא

$$H(\omega) = H_2(\omega)H_1(\omega)\,. \tag{5.5.8}$$

דוגמה 5.5.2 חיבור מערכות במקביל מתואר על ידי השרטוט המצורף. נחשב את תגובת התדר הכוללת.



איור 5.2: חיבור מערכות במקביל

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) \tag{5.5.9}$$
$$= H_1(\omega)X(\omega) + H_2(\omega)X(\omega) \tag{5.5.10}$$
$$= (H_1(\omega) + H_2(\omega))X(\omega) \tag{5.5.11}$$

ולכן תגובת התדר של המערכת הכוללת היא $H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$.

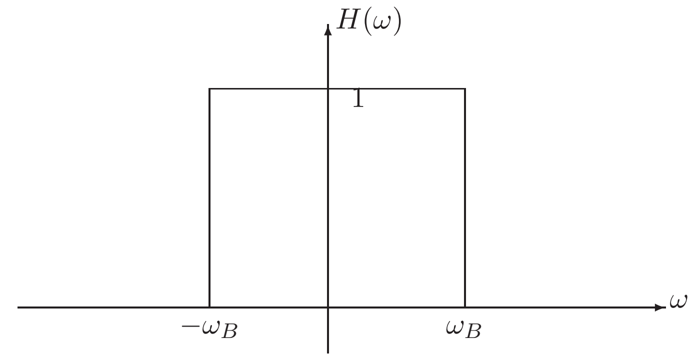
בהסתכלות של פרק זה, אפשר לפרש את השפעת המערכת על אות הכניסה כך: המערכת משפיעה בצורה שונה על רכיבי האות בתדרים שונים. המערכת מסננת תדרים בהם $H(\omega)$ הוא קטן, ומחזקת את האות בתדרים בהם $H(\omega)$ גדול. בהסתכלות כזו על מערכת טיבעי לקרוא למערכת "מסנן". מסנן אם כך הוא מערכת, כאשר ההסתכלות היא דרך השאלה---כיצד משפיעה המערכת על אות הכניסה בכל תדר.

5.5.1 מסננים

המסננים הבסיסיים ביותר מיועדים אכן לסנן תדרים מסויימים.

הגדרה 5.5.3 מסננים מעבירי סרט. מסנן מעביר נמוכים *Low Pass Filter* אידיאלי עם תדר קטעון ω_B הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

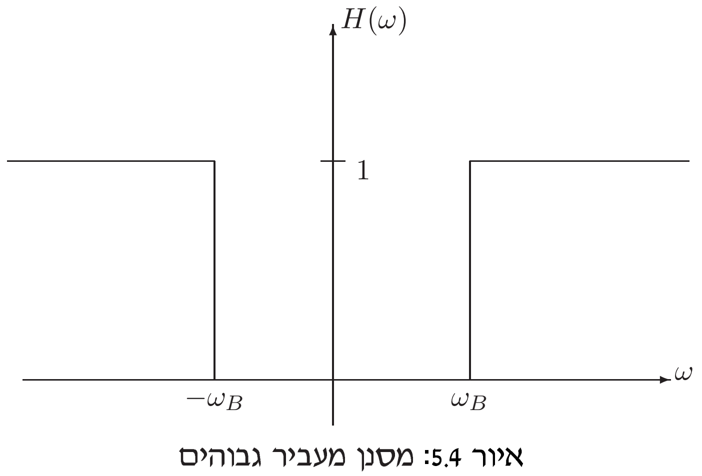
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B \,. \end{cases} \tag{5.5.12}$$



איור 5.3: מסנן מעביר נמוכים

מסנן מעביר גבוהים *High Pass Filter* אידיאלי עם תדר קטעון ω_B הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

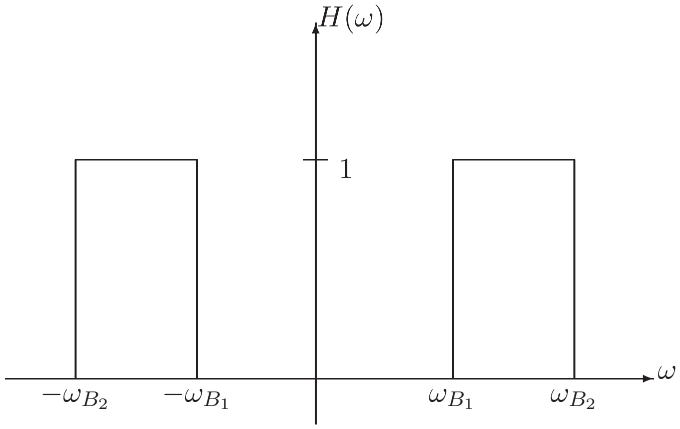
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| > \omega_B \\ 0 & |\omega| < \omega_B \,. \end{cases} \tag{5.5.13}$$



איור 5.4: מסנן מעביר גבוהים

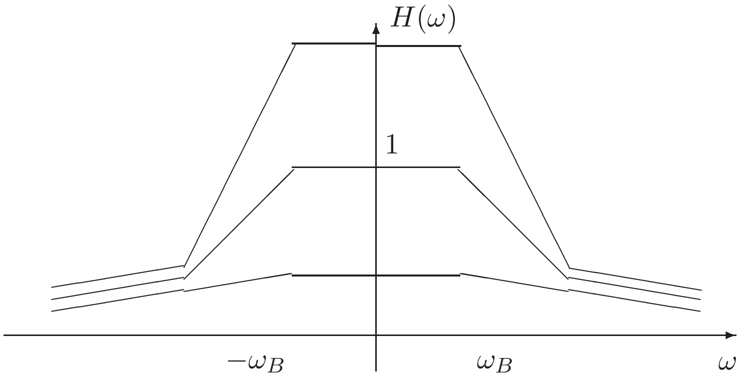
מסנן מעביר סרט *Band Pass Filter* אידיאלי בתדרים $\omega_{B_1}, \omega_{B_2}$ הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{B_1} < |\omega| < \omega_{B_2} \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{5.5.14}$$



איור 5.5: מסנן מעביר סרט

דוגמה 5.5.4 מסנן פרמטרי הוא מסנן אשר ניתן לכוונן את צורתו או גובהו. מסננים כאלו נמצאים בכל מערכת סטראו: לדוגמה, המסנן שתפקידו להנחית (להקטין) או להגביר את התדרים הנמוכים, בהתאם לבחירת המשתמש. מסנן פרמטרי נראה בקירוב כמתואר בשרטוט, כאשר האמצעי מתאר את ההתנהגות כאשר המסנן אמור להעביר ללא כל שינוי את תחום התדרים הרלוונטי. אנו רואים כי מסנן מעשי יכול להעביר בצורה סבירה רק תחום תדרים מוגבל; מעבר להם הוא מנחית. בנוסף, המסנן אינו אידאלי (כלומר אינו בצורת מלבן), ולכן לא ברור מהו תחום התדרים המדויק בו נאמר שהמסנן מעביר ללא הנחתה, ובאיזה תחום הוא מנחית. החלטה זו היא שרירותית, ונלקחת משיקולים הנדסיים. עוד בנושא נראה בפרק 9. בשרטוט הקו התחתון מתאר את תגובת התדר של המסנן כאשר הוא מכוונן להנחית את התדרים הנמוכים, והקו העליון מתאר את תגובתו כאשר הוא מגביר תדרים נמוכים.



איור 5.6: מסנן פרמטרי מעביר נמוכים

דוגמה 5.5.5 רמקול איכותי למערכות שמע מורכב למעשה ממספר רמקולים באותה קופסה. הסיבה לשימוש במספר רמקולים היא שקשה לבנות רמקול איכותי אשר יכול לתרגם אותות חשמליים לאותות אקוסטיים בצורה נאמנה על פני טווח תדרים גדול. זאת כיוון שבתדרים נמוכים יש צורך להזיז כמויות אויר גדולות, ולכן צריך רמקול גדול, אך רמקול כזה מתקשה לנוע בתדירויות גבוהות. מסיבה זו בדרך כלל ישנם שלושה רמקולים, הזוכים לשמות *Woofer*---רמקול המטפל בתדרים נמוכים ($70-700$ הרץ), *mid-range*---רמקול המטפל בתדרי הבניים ($700-5000$ הרץ), ו-*tweeter*---רמקול המטפל בתדרים גבוהים (במערכות איכותיות במיוחד יש *subwoofer* לתדרים נמוכים מאד). כחלק מהרמקול בונים מעגל, הנקרא *crossover*, ואשר תפקידו הוא להעביר לכל רמקול רק את תחום התדרים הנוגע לו. זאת כדי לנצל

טוב יותר את אנרגיית האות, ולהמנע מלגרום נזקים לרמקולים. המעגל מיישם בדוגמה שלנו שלוש מערכות---מסנן מעביר נמוכים המעביר ל-*woofer* את התדרים הנמוכים, מסנן מעביר סרט ומסנן מעביר גבוהים המעבירים את התדרים המתאימים לרמקולים האחרים. בנוסף משתמשים לעיתים במעגל החשמלי כדי לתקן עיוותים של הרמקולים. רמקול אידאלי מקבל אות חשמלי בתחום תדרים נתון, והופך אותו לאות אקוסטי ללא שינוי. כלומר תגובת המערכת היא קבועה:

$$H(\omega) = \begin{cases} K & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B_2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{5.5.15}$$

אולם רמקולים מעשיים כידוע אינם אידאלים. ניתן לקזז על כך במידת מה על ידי מעגל חשמלי---מסנן, שיוגדר כך. אם תגובת התדר של הרמקול היא $H_L(\omega)$ נייישם מסנן אשר תגובת התדר שלו היא

$$H_F(\omega) = \begin{cases} K/H_L(\omega) & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B_2} \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{5.5.16}$$

האות החשמלי נכנס למסנן ואחריו לרמקול, כלומר המערכות פועלות בטור. תגובת התדר של שתי המערכות ביחד היא לכן

$$H(\omega) = H_L(\omega)H_F(\omega) = \begin{cases} K & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B_2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{5.5.17}$$

בדיוק התגובה הרצויה.

דוגמה 5.5.6 הפחתת רעשים על ידי זוג מסננים. ראינו כי ניתן להעזר במסנן כדי לתקן את תגובת התדר של מערכת בעזרת מערכת מקדימה (*pre-filter*). נתבונן כעת במערכת נתונה אשר פעולתה כוללת רעשים. זהו המצב למשל בטייפ, צורב תקליטורים או צורב *DVD*: עקב חיכוך מכני נוצרים רעשים במערכת בשלב ההקלטה, ובצורה דומה נוצרים רעשים בזמן ההשמעה. נחשוב אם כן על הפעולה הכוללת: אות הכניסה עובר דרך מערכת לינארית ונוסף לו רעש:

$$y(t) = x(t) * h(t) + n(t) \quad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) + N(\omega)\ . \tag{5.5.18}$$

כמו בדוגמאות קודמות, אין לנו שליטה על H ועל N. נניח (מצב מעשי) שאות הרעש חלש בתדרים נמוכים וחזק יחסית בתדרים גבוהים. ניצור מערכת חדשה על ידי הוספת שני מסננים: מסנן מקדים *pre-filter* המתואר על ידי H_1, אשר מגביר תדרים גבוהים, ומסנן סופי *post-filter* המתואר על ידי H_2 כך ש-$H_1(\omega)H_2\omega) = 1$ בתחום התדרים הרלוונטי. בגלל לינאריות המערכות, סדר ההפעלה אינו חשוב. בגלל התכונה האחרונה, זוג המסננים לא ישנה את הקשר בן כניסה ליציאה. אולם מבחינת הרעש $N(\omega)$ הוספנו רק את מסנן H_2 אשר מנחית את התדרים בהם הרעש גדול. קיבלנו הפחתת רעשים.

מסנן דולבי כולל רכיב מסוג זה: בזמן ההקלטה מופעל H_1 כלומר מוגברים התדרים הגבוהים באות הכניסה. בזמן ההשמעה מונחתים התדרים הגבוהים על ידי H_2, וכך נשמר האות המקורי מצד אחד, בעוד שהרעש מדוכא.

מסנן דולבי כולל גם רכיב לא לינארי, בו לא נדון.

בצורה דומה ניתן להגדיר גם מסנן חוסם נמוכים Low Stop Filter אשר כמובן אינו אלא מסנן מעביר גבוהים. הגדרת מסנן חוסם גבוהים דומה. לבסוף, מסנן חוסם סרט Band Stop Filter מעביר את כל התדרים למעט חלון תדרים. את כל המסננים המתוארים לעיל אפשר לבנות משתי מערכות בסיסיות: מערכת אשר תגובת התדר שלה היא 1 בכל התדרים, ומסנן מעביר נמוכים. זאת על ידי חיבורים במקביל ובטור. לכן נסתפק בהעמקה בנושא מסנן מעביר נמוכים.

נחשב את תגובת ההלם של מסנן מעביר נמוכים עם תדר קטעון B.

$$
\begin{aligned}
h_{LPF}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[H_{LPF}\right] && (5.5.19)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{LPF}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega && (5.5.20)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{j\omega t}\,d\omega && (5.5.21)\\
&= \frac{1}{2\pi jt}\left[e^{jBt}-e^{-jBt}\right] && (5.5.22)\\
&= \frac{1}{\pi t}\sin(Bt) && (5.5.23)\\
&= \frac{B}{\pi}\frac{\sin Bt}{Bt} && (5.5.24)\\
&= \frac{B}{\pi}\operatorname{sinc}(Bt)\,. && (5.5.25)
\end{aligned}
$$

הפונקציה sinc שווה 1 ב-$t=0$ וזה הערך המקסימלי שלה. הפונקציה מתאפסת בכפולות שלמות של π למעט כאמור ב-0. נשים לב כי אות זה שונה מאפס גם לערכים גדולים של t וגם לערכים שליליים של t. מכאן שהוא מתאר מערכת לא סיבתית, עם תגובת הלם שאינה סופית. העובדה הראשונה גוררת כי לא ניתן לממש מסנן כזה בזמן אמיתי, ולכן לא ניתן לממש מסנן מעביר נמוכים אידאלי. כדי לממש מסנן מקורב נממש מסנן עם השהיה: נשהה את תגובת ההלם, ונאפס אותה בזמנים שליליים. ככל שההשהיה גדולה יותר כך תשמר יותר צורת האות---ושיווי המשקל בין השהיה ועיוות הוא שיקול הנדסי התלוי במטרת המסנן.

5.5.2 מערכת פאזה לינארית

מערכת פאזה לינארית מוגדרת דרך תגובת התדר, בהתאם לדרישות כי

$$|H(j\omega)| = 1, \qquad (5.5.26)$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \alpha\omega\,. \qquad (5.5.27)$$

עבור α כלשהו. משמעות שתי הדרישות היא כי $H(j\omega)=e^{j\alpha\omega}$. אם כן, פעולת המערכת על אות x היא

$$Y(\omega) = X(\omega)e^{j\alpha\omega} \qquad (5.5.28)$$

ולכן

$$y(t) = x(t+\alpha)\,. \qquad (5.5.29)$$

כלומר זוהי השהיה.

5.6 דוגמאות לשימוש בהתמרת פוריה

בסעיף זה נראה מספר דוגמאות לשימושים הנדסיים של התמרת פוריה. ניתן תאור (פשטני אך נכון עקרונית) של איפנון ושל ריבוב. בהמשך נתאר את מושג המסנן ותאורו בתחום התדר.

5.6.1 איפנון

נניח שאנו מעוניינים להעביר אות שמע (דיבור, מוסיקה) למרחק רב. האטמוספירה מנחיתה אותות בתדרי השמע ($0-20KHz$), ולכן קשה להעבירם למרחק רב. לעומת זאת האטמוספירה מעבירה אותות אלקטר-ומגנטיים בצורה טובה למדי. כדי ליצר גל אלקטרומגנטי יש צורך באנטנה, אשר אורכה צריך להיות קרוב לאורך הגל. אנטנה אשר מתאימה לאורך גל שהוא עשירית מזה המתאים לאות שמע בתדר גבוה תהיה באורך של

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{300,000}{20,000}\frac{km/sec}{1/sec}=15km\,. \tag{5.6.1}$$

מעט ארוך בשביל אנטנה מעשית. ננסה לכן להלביש את האות הרצוי x על אות (אלקטרומגנטי) בתדר גבוה בהרבה. התדרים המקובלים לשידורי גלים אלקטרומגנטיים הם מ-$0.5MHz=500KHz$ עד $3000MHz=3GHz$. אות חוזי (וידאו) סטנדרטי מגיע עד תדר $5.5MHz$ וכפי שנראה בהמשך כדי להעבירו נצטרך תדרים אלקטרומגנטיים גבוהים יותר.

שיטת האפנון הפשוטה ביותר נקראת איפנון אמפליטודה---AM—Amplitude Modulation. בשיטה זו מייצרים אות בתדר שנסמן ב-ω_0: נניח $\cos(\omega_0 t)$ ומכפילים בו את האות הרצוי---נקבל אות חדש

$$y(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)\,. \tag{5.6.2}$$

את האות החדש נשדר. אם x הוא אכן אות שמע, אזי הוא בעל גודל משמעותי עד סביב $20KHz$, ולכן נצפה כי $X(\omega)\approx 0$ עבור $\omega>>20KHz$. נבצע התמרת פוריה לאות המשודר: לפי (5.4.14) ותכונת הקונוולוציה בתדר,

$$\mathcal{F}\left(x\cos(\omega_0 t)\right)(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t))(\omega) \tag{5.6.3}$$

$$=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) \tag{5.6.4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right)\,. \tag{5.6.5}$$

אם לכל ω לפחות אחד מהאותות מתאפס, כלומר או ש-$X(\omega-\omega_0)=0$ או $X(\omega+\omega_0)=0$, אזי ברור אינטואיטיבית שלא איבדנו שום מידע: אנו יודעים בדיוק מה צורתו של $X(\omega)$. נניח אם כן כי קיים כך ω_B ש-$X(\omega)=0$ עבור $|\omega|>\omega_B$, ותדר הגל הנושא מקיים $\omega_0>\omega_B$.

כדי לשחזר את האות Demodulation נכפיל את האות המשודר שוב באותו אות cos, עם אותו תדר ואותה פאזה (האמפליטודה אינה חשובה כל עוד היא ידועה שכן תמיד ניתן להעביר את האות במגבר מתאים).

נסמן את האות המשוחזר ב-z. נקבל

$$z(t) = y(t)\cos(\omega_0 t) \tag{5.6.6}$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{2}\left[Y(\omega-\omega_0)+Y(\omega+\omega_0)\right] \tag{5.6.7}$$

$$= \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{4}X(\omega-2\omega_0) + \frac{1}{4}X(\omega+2\omega_0)\,. \tag{5.6.8}$$

כל שנותר לנו זה לזרוק את החלקים המיותרים. נבנה מערכת קונוולוציה אשר התמרת פוריה של גרעין הקונוולוציה $H(\omega)$ מקיימת

$$H(\omega) = \begin{cases} 2 & |\omega| < \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B\,. \end{cases} \tag{5.6.9}$$

כלומר מסנן מעביר נמוכים. אם נכניס את z למערכת זו נקבל במוצא

$$Z(\omega)H(\omega) = X(\omega)\,. \tag{5.6.10}$$

כלומר קבלנו שיחזור מושלם את האות הרצוי, יחד עם שינוי תדריו לצורך שידור.
כמובן שבאופן מעשי קשה לדרוש שמערכת השחזור תהיה בתאום תדר ותאום פאזה מושלם עם מערכת האיפנון. ניתן ליצור מערכת שיחזור המבוססת על גלוי מעטפת. כדי למנוע חוסר בהירות באשר לסימן של האות, יש צורך להזיז את האות על ידי תוספת קבוע, על מנת שיהיה חיובי תמיד. במצב זה קל לראות כי גלאי מעטפת ישחזר את האות. אולם זו אינה מערכת לינארית והכלים שבידינו אינם מאפשרים לנתח את התנהגותה.

5.6.2 ריבוב

בסעיף הקודם גילינו כיצד לשדר אותות שמע על גבי אותות אלקטרומגנטיים, בתדר גבוה בהרבה. הצעד הבא הוא שימוש יעיל בתדרים שונים על מנת להעביר כמות מידע גדולה יותר. זאת על ידי ניצול תדרים שונים בשיטת FDM: Frequency Division Multiplexing. שיטה זו משמשת בכל העולם להעברת שידורי רדיו, טלויזיה ועוד. לשם המחשה נניח שיש לנו שלושה אותות אותם אנו מעוניינים לשדר. נסמן אותם ב-x_1, x_2, x_3. נניח לשם פשטות שכולם מוגבלים בתדר, כלומר קיים ω_B כך שמתקיים $X_i(\omega) = 0$ עבור $|\omega| > \omega_B$. נבחר ω_i כך שיתקיים

$$\omega_B < \omega_1 \tag{5.6.11}$$

$$\omega_1 + 2\omega_B < \omega_2 \tag{5.6.12}$$

$$\omega_2 + 2\omega_B < \omega_3\,. \tag{5.6.13}$$

נכפיל כל אחד מאותות הכניסה ב- cos בתדר המתאים ונחבר. האות שהתקבל, שהוא האות שנשדר, הוא

$$y(t) = x_1(t)\cos\omega_1 t + x_2(t)\cos\omega_2 t + x_3(t)\cos\omega_3 t\,. \tag{5.6.14}$$

בתחום התדר (התמרת פוריה) נקבל

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}\Big[X_1(\omega-\omega_1)+X_1(\omega+\omega_1)+X_2(\omega-\omega_2)+X_2(\omega+\omega_2)+X_3(\omega-\omega_3)+X_3(\omega+\omega_3)\Big]. \tag{5.6.15}$$

בגלל התנאי שהצבנו על x_i (רוחב סרט) והקשרים בין תדרי האפנון, קל לראות כי אין שום חפיפה (במישור התדר) בין ההתמרות של האותות השונים, ולפיכך ניתן לשחזרם. נשחזר לדוגמה את האות הראשון. את האות הנקלט (שהוא y) נעביר תחילה דרך מסנן מעביר סרט:

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega-\omega_1| \le \omega_B \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{5.6.16}$$

אם נעביר את האות הנקלט Y במסנן זה נקבל במוצא

$$Y(\omega)H_1(\omega) = \frac{1}{2}[X_1(\omega-\omega_1)+X_1(\omega+\omega_1)]. \tag{5.6.17}$$

מכאן אנו יודעים לשחזר את x_1: עשינו זאת בסעיף הקודם כאשר דנו באיפנון. נכפיל ב-$\cos\omega_1 t$ ונעביר במסנן מעביר נמוכים H המעביר רק תדרים מתחת ל-ω_B.

המערכת שקיבלנו מאפשרת להעביר בו זמנים מספר אותות, כאשר כל אות מרוכז סביב תדר משלו, וכל אות מוגבל ברוחב הסרט בו הוא משתמש, כך שלא תהיינה חפיפות בין האותות. כך ניתן יהיה לשחזרם. רק לצורך המחשה, אם אנו משדרים אותות שמע, אשר רוחב הסרט שלהם הוא כ-$20KHz$ ומשתמשים בתחום שבין $1.5GHz - 2.5GHz$ הרי שדרישת ההפרדה (מרווח של $2\omega_B$ בין שני תדרים) מאפשרת העברה (החישוב ב-KHz) של

$$\frac{1,000,000}{2\cdot 20} = 25,000 \tag{5.6.18}$$

אותות בו זמנית.

5.7 תוספות---התמרת פוריה

5.7.1 התמרת פוריה ועקרון אי הוודאות

בעזרת תכונות התמרת פוריה ניתן לקבל מידע על היחס בין "פיזור האות" בזמן לבין "פיזור האות" בתדר. מתכונת שינוי סקלת זמן תדר (משוואה (5.3.14), משפט 5.3.5)

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{5.7.1}$$

אנו רואים כי הגדלת הפיזור בזמן (על ידי בחירת a גדול) תגרום להקטנת הפיזור בתדר. השאלה היא: האם קיימים אותות שהפיזור שלהם הן בזמן והן בתדר הוא קטן באופן שרירותי? כמובן שהתשובה תלויה בהגדרת הפיזור. מקובל בהנדסה (ובפיזיקה) להגדיר רוחב אפקטיבי בזמן Δt כמדד לפיזור בזמן. הוא מוגדר על ידי

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt}. \tag{5.7.2}$$

בצורה דומה רוחב הסרט האפקטיבי בתדר $\Delta\omega$ על ידי

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega} \,. \tag{5.7.3}$$

נשים לב כי הנירמול (המכנה) מביא לכך שהפיזור אינו תלוי בהגבר: אם נכפיל את האות בקבוע כלשהו α רוחב הסרט האפקטיבי לא ישתנה.

משפט 5.7.1 אם האות x מקיים את התנאי הטכני

$$\lim_{|t|\to\infty} \left[\sqrt{t}\, x(t)\right] = 0 \tag{5.7.4}$$

אזי $\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 1/2$ ושוויון מושג עבור $x(t) = e^{-\alpha t^2}$.

הוכחה: נוכיח עבור המקרה ש-$x \in L_2$. מהתנאי על x נובע שהאות קרוב למלא תנאי זה. כפי שהערנו לעיל, התוצאה אינה משתנה אם נכפיל את x בקבוע כלשהו. נעשה זאת אם כן, כך שנקבל $||x||_2 = 1$. לאותות ב-L_2 אי שוויון קושי-שוורץ הוא

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} z(t)y(t)\, dt\right|^2 \leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2\, dt\right| \left|\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\, dt\right| \,. \tag{5.7.5}$$

כאשר שוויון יתקיים אם ורק אם $z(t) = \alpha y(t)$ עבור קבוע כלשהו. נשתמש גם במשפט פרסוול והתמרת הנגזרת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega \tag{5.7.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |j\omega X(\omega)|^2\, d\omega \,. \tag{5.7.7}$$

את הקבוע $1/2$ נקבל דרך החישוב הבא, תוך שימוש באינטגרציה בחלקים

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\frac{dx}{dt}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{dx^2(t)}{dt}\, dt \tag{5.7.8}$$

$$= \frac{1}{2}\, tx^2(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt \tag{5.7.9}$$

$$= -\frac{1}{2} \tag{5.7.10}$$

כיוון שהביטוי הראשון מתאפס בשני הגבולות בגלל ההנחה על x והאנטגרל הוא הנורמה של x שהיא 1. כעת נשתמש בהחישוב הקודם ונפעיל את אי שוויון קושי שוורץ כאשר $z(t) = tx(t)$ ו-$y(t) = dx(t)/dt$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\frac{dx}{dt}\, dt\right|^2 \tag{5.7.11}$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t)|^2\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt \tag{5.7.12}$$

ומפרסוול נקבל את שני השיוויונים הבאים

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t)|^2\,dt \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega X(\omega)|^2\,dt \tag{5.7.13}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt}\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega X(\omega)|^2\,dt}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,dt} \tag{5.7.14}$$

$$= (\Delta t)^2(\Delta\omega)^2\,. \tag{5.7.15}$$

שוויון מתקיים כאשר

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha t x(t) \tag{5.7.16}$$

או

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\ln[x(t)]}{dt} \tag{5.7.17}$$

$$= \alpha t \tag{5.7.18}$$

$$x(t) = ce^{-\alpha t^2/2}\,. \tag{5.7.19}$$

מ.ש.ל.

5.7.2 משפטי חלקות

משפט 5.7.2 אם x ונגזרותיו עד סדר n קיימים וחסומים, כלומר קיים מספר B כך ש-

$$\sup_t\left|\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right| \le B, \quad 0\le k\le n \tag{5.7.20}$$

אזי התמרת פוריה שואפת לאפס כאשר $|\omega|\to\infty$ לפחות בקצב $|\omega|^{-(n+1)}$, כלומר קיים חסם B_1 כך ש-

$$\lim_{|\omega|\to\infty}|\omega^{n+1}X(\omega)| \le B_1\,. \tag{5.7.21}$$