אותות ומערכות 044130

אדם שורץ
הפקולטה להנדסת חשמל
טכניון

September 2006

גרסה 1.1

תוכן ענינים

פרק 1

מבוא

דפים אילו הם תקציר הרצאות לקורס.

כיוון שכך, הארגון נגזר מתפיסת ההוראה שלי: להגיע לחומר המהותי מוקדם כל האפשר, ולתת דוגמאות מעשיות מוקדם ככל האפשר. מכך נובע שרקע דרוש ינתן בדרך כלל רק כאשר הוא נחוץ (למשל תכונות של אותות), ונושאים מסויימים מופיעים במספר מקומות (למשל יציבות - הפרק בנושא זה מכסה רק חלק מהשיטות לניתוח יציבות).

בחוברת מופיעות הערות עזר, המותאמות לתכנית הלמודים בפקולטה להנדסת חשמל בטכניון. לדוגמה - המלצה לחזרה לקראת לימוד נושא מסויים, עם הפניה לקורס קודם בטכניון.

ניסיתי להיות מדויק ככל האפשר בצדדים המתמטיים: כאשר הדבר לא התאפשר כתבתי זאת במפורש. בכל מקום שמופיעה המילה "משפט" - הכוונה היא שכל התנאים המתמטיים מופיעים. כל "הוכחה" היא אכן הוכחה במובן המתמטי. כאשר מופיעות המילים "הערה מתמטית" הכוונה היא להערה המיועדת למתעניינים, ומרחיבה מעבר לחומר הקורס.

לדעתי דפים אלו אינם תחליף להרצאות, שכן בהרצאות מועברת אינטואיציה חשובה. אולם קריאה שיטחית של דפים אלו כהכנה להרצאה תאפשר להפיק את מירב התועלת מההרצאה (רמת הבנה גבוהה יותר, ותשומת לב להרצאה ולא לצורך לכתוב הכל). בנוסף אפשר לקרוא לאחר ההרצאה כדי לוודא שכל הנקודות הובנו וכחזרה המשפרת את הטמעת החומר.

מטבע הדברים יש בחוברת נושאים אשר לא יכוסו בכיתה (בפרט חזרה על חומר קודם), נושאים אשר מכוסים בכיתה רק בקצרה, ודוגמאות אשר לא יופיעו בכיתה. מצד שני ישנן דוגמאות אשר מופיעות בהרצאה אך לא בחוברת. בנוסף, חסרים בחוברת שרטוטים רבים. עם זאת, החומר התאורטי של הקורס מכוסה כולו בחוברת.

תודה למורי הקורס על תרומתם להבנתי את הנושא ולטקסט המצורף.

1.1 מוטיבציה

המהנדס המודרני מרבה להשתמש בכלים כמותיים לצורך ניתוח ותכנון. מטרת הקורס היא לתת כלים, רובם מתמטיים, לניתוח התנהגות של מערכות, ומספר כלים אשר ישמשו לתכנון.

1. דוגמאות:

- עבוד אות: סנון רעשים
  – איפיון רעש בתחום התדר
  – הפחתת רעשים

אנו מכירים את המושגים "צליל גבוה" ו-"צליל נמוך" מחיי היום-יום. בפרט כולנו מכירים את הבורר בנגן החביב עלינו אשר מאפשר הגברת הצלילים הגבוהים או הנמוכים. כיצד ניתן לאפיין את תחום הצלילים הגבוהים של אות נתון, וכיצד ניתן לתכנן מסנן---כלומר מכשיר המשנה אות נתון כך שיוגבר תחום תדר מסוים? כיצד לתת משמעות מדויקת למשפט "לאות הרצוי נוסף כנראה רעש אשר בולט במיוחד בצלילים הגבוהים"? כיצד לתכנן מסנן אשר יפחית רעשים כאלו תוך פגיעה מינימלית באות הרצוי? זוהי דוגמה לניתוח ותכנון בתחום התדר. הבנת תחום התדר והכלים שהוא מציע הם נושאים מרכזיים בקורס.

- קידוד ושיחזור: אפנון

שידור רדיו מתבצע בתדרים גבוהים יחסית---עשרות עד מאה מגה-הרץ---מסיבות הנדסיות ומסיבות של זמינות משאבי תדר. לעומת זאת תדרי השמע הם נמוכים. כיצד ניתן אם כך לשדר אות שמע? הפתרון הוא על ידי אפנון, כלומר "הלבשת" האות הרצוי על גבי "גל נושא" בתדר השידור. איפיון וניתוח של איפנון נוחים בשיטות של תחום התדר, ודורשים הבנה של המשמעות ההנדסית של התמרות פוריה.

- דגימה ושחזור לצורך עבוד אות ספרתי.

בהנתן אות אנלוגי (דוגמה אות שמע),כיצד ניתן ליצר ממנו אות ספרתי (כלומר סדרת דגימות)? עקב כוחם הגובר של מחשבים, נוח לטפל באותות ולעבדם בצורה ספרתית, ולשם כך יש לבצע דגימה. האם פעולת הדגימה גורמת לאיבוד מידע? איזה חלק מהמידע הולך לאיבוד? כדי לתת תשובה יש להפעיל כלים מתמטיים של פונקציות מוכללות, ולעבוד במשולב בתחום הזמן ובתחום התדר.

- ניתוח ותכנון מערכות.

האותות בהם אנו מטפלים יכולים לייצג מידע (למשל מדידות של מכ"מ), או להיות אותות המשפיעים על פעולה של מערכת כלשהיא (למשל אותות בקרה להפעלת קורא הלייזר בקורא התקליטורים). על אותות אלו משפיעים גורמים רבים. חלקם אינם בשליטתינו (רעשים) ועל חלקם אנו שולטים (למשל מסננים). מבחינתינו "מערכת" היא "קופסה שחורה" אשר משפיעה על האות. נרצה לאפיין כיצד משפיעה מערכת נתונה על אותות (ניתוח) ולפתח כלים לתכנון מערכות אשר ישיגו השפעה רצויה על אותות. בקורס נלמד לאפיין ולנתח מערכות לפי מאפיינים רבים, כולל קריטריון מרכזי של "יציבות של מערכת". אינטואיטיבית, מערכת יציבה היא מערכת אשר הפעלה שלה על אות קטן תתן לנו תוצאה קטנה---ומבחינה הנדסית זו ודאי תכונה רצויה.

2. שאלות ומטרות בקורס:

- הרחבת סוג האותות בהם אנו יודעים לטפל בצורה מדויקת---פונקציות מוכללות.

- אפיון אות בתחום התדר ופיתוח כלים בתחום התדר.
- אפיון מוצא מערכת בתלות בכניסה.
- חיבור מערכות לצורך תכנון מודולרי, כולל חיבור משוב.
- מטרה כללית: לפתח חשיבה מערכתית. להכיר כלים ולפתח הבנה של התורה המתמטית הבסיסית של אותות ושל מערכות לינאריות.

1.2 אודות הקורס

1. ידע מוקדם
מעבר לקדמים הרישמיים, קורס זה משתמש ומרחיב נושאים מאלגברה לינארית, טורי פוריה והתמרות אינטגרליות, ומשוואות דיפרנציאליות רגילות. השימוש בכלים מפונקציות מרוכבות הוא קטן יותר. מושגי יסוד רבים אשר נלמדו בתורת המעגלים יורחבו כאן ויקבלו ביסוס מתמטי איתן. בנוסף נשתמש במעגלים חשמליים ובמערכות מיכניות (פיזיקה 1) כדוגמאות של אותות ושל מערכות.

2. סקירת תכנית הקורס וקורסי המשך

(א) מבוא: דוגמאות. סקירת נושאי הקורס.

(ב) משוואות דיפרנציאליות כמערכת. תכונות של מד"ר. פתרונות של מד"ר. ייצוג פתרונות דרך קונוולוציה עם תגובת ההלם. תכונות של מערכות ותכונות מד"ר כמערכת.

(ג) מערכות אנטגרליות ומערכות קונוולוציה. פונקציות מוכללות. תכונות מערכת אינטגרלית ומערכת קונוולוציה. חיבור של מערכות קונוולוציה.

(ד) יציבות. הגדרת יציבות **BIBO**. יציבות **BIBO** של מערכת קונוולוציה. הגדרת יציבות אסימפטוטית. יציבות אסימפטוטית של מערכת מד"ר ושרשי הפולינום האפייני.
תגובת מערכת מד"ר וקונוולוציה לכניסה $e^{\alpha t}$.

(ה) התמרת פוריה. הרחבה לפונקציות מוכללות. דוגמאות לשימוש. מבוא למסננים.

(ו) התמרת לפלס. התמרה דו צדדית ופונקצית התמסורת. יציבות **BIBO**, חיבור מערכת כולל חיבור משוב, מערכת הופכית.
התמרה חד צדדית ופתרון מד"ר עם תנאי התחלה. יציבות אסימפטוטית.
התמרה הפוכה וחישובה.

(ז) טור פוריה. הרחבה לפונקציות מוכללות. שימושים להתמרת פוריה. תופעת גיבס. דגימה ושחזור. קשרים בן לפלס ופוריה וטור פוריה. תגובת תדר ודיאגרמות בודה. דוגמה מסכמת - מסנן **Butterworth**.

(ח) אותות ומערכות בזמן בדיד. הזזה ומשוואות הפרש, תכונות של משוואות הפרש. דלתה של קרונקר ותגובת הלם. קונוולוציה בזמן בדיד. תכונות מערכת גרעין וקונוולוציה. תגובות לכניסה אקספוננציאלית. יציבות **BIBO** ויציבות אסימפטוטית.

(ט) התמרת Z. התמרת דו צדדית, פונקצית תמסורת ויציבות BIBO. התמרה חד צדדית, פתרון משוואות הפרש, יציבות BIBO ויציבות אסימפטוטית.

(י) התמרת פוריה בזמן בדיד. טור פוריה. תכונות DTFT.

(כ) מערכות במרחב המצב. דוגמה: מיקום קטבים בעזרת משוב. הגדרת מצב, ייצוג ופתרון מד"ר על ידי משוואות מצב. פתרון משוואות מצב במשור הזמן. המטריצה היסודית, הפונקציה e^{At} ותכונותיה. יציבות BIBO דרך מרחב המצב. משוואות מצב בזמן בדיד. שיטות התמרה למשוואות מצב.

3. קורסי המשך:

תחום התקשורת: תקשורת ספרתית ותקשורת אנלוגית.

תחום עיבוד אותות: מבל"ס, עיבוד תמונות, אותות ביולוגיים.

בקרה ותורת המערכות. תורת הרשתות.

אותות אקראיים. קורסים בניתוח של רשתות מחשבים של ואלגוריתמים.

1.3 דוגמאות

על מנת להמחיש אחד הנושאים---ניתוח בתחום התדר---נתאר דוגמה הלקוחה מסעיף 5.5.1. נחשוב על מסנן כעל רכיב המתייחס בצורות שונות לאותות בתדרים שונים. המסננים הבסיסיים ביותר מיועדים אכן לסנן תדרים מסויימים. נראה בהמשך כי אפשר לתאר מסנן דרך פונקציה הנקראת תגובת התדר: אם נעביר במסנן אות סינוסי שגודלו X והתדר שלו הוא ω_0, ואם והמסנן מתואר על ידי הפונקציה $H(\omega)$ אזי במוצא המסנן נקבל $H(\omega_0)X(\omega_0)$. למשל מסנן מעביר נמוכים עם תדר קטעון ω_B הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B \,. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

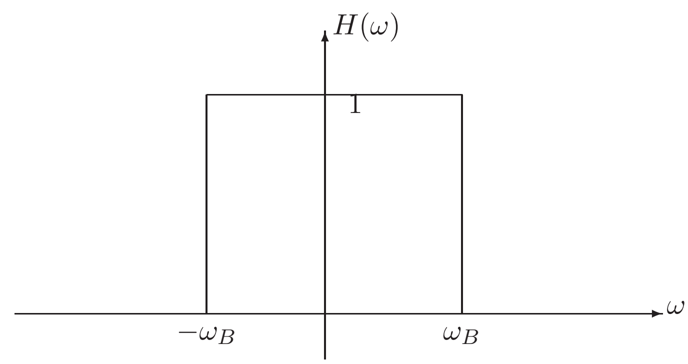
כלומר, אות בתדר נמוך מ-ω_B יעבור ללא שינוי, ואות בתדר גבוה יותר לא יעבור כלל.

תגובת התדר היא בדיוק הפאזור המתאר את ההתנהגות של מעגל: אם נכניס למעגל אות (זרם או מתח) בצורה $X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ אזי תגובת המעגל (שוב זרם או מתח) תהיה $H(\omega_0)X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ כלומר אם פאזור אות הכניסה הוא $X(\omega_0)$ אזי פאזור אות המוצא הוא $H(\omega_0)X(\omega_0)$.

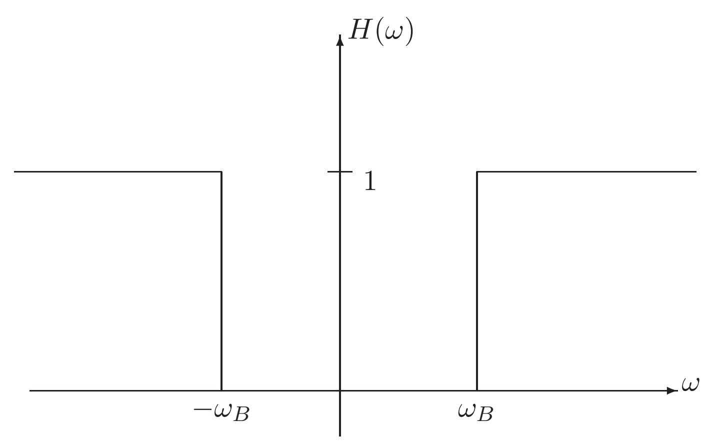
בצורה דומה, מסנן מעביר גבוהים עם תדר קטעון ω_B הוא מערכת עם תגובת התדר

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| > \omega_B \\ 0 & |\omega| < \omega_B \,. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

מסנן מעביר סרט בתדרים $\omega_{B_1}, \omega_{B_2}$ הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא



איור 1.1: מסנן מעביר נמוכים

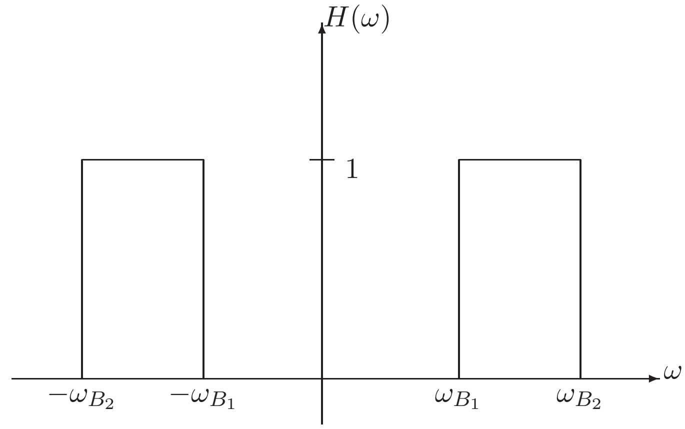


איור 1.2: מסנן מעביר גבוהים

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & \omega_{B_1}<|\omega|<\omega_{B_2}\\ 0 & otherwise.\end{cases} \tag{1.3.3}$$

בעזרת מושג המסנן אפשר לתאר מערכת מעשית:

דוגמה 1.3.1 רמקול איכותי למערכות שמע מורכב למעשה ממספר רמקולים באותה קופסה. הסיבה לשימוש במספר רמקולים היא שקשה לבנות רמקול איכותי אשר יכול לתרגם אותות חשמליים לאותות אקוסטיים בצורה נאמנה על פני טווח תדרים גדול. זאת כיוון שבתדרים נמוכים יש צורך להזיז כמויות אויר גדולות, ולכן צריך רמקול גדול, אך רמקול כזה מתקשה לנוע בתדירויות גבוהות. מסיבה זו בדרך כלל ישנם שלושה רמקולים, הזוכים לשמות *Woofer*---רמקול המטפל בתדרים נמוכים ($700-70$ הרץ), *mid-range*---רמקול המטפל בתדרי הבניים ($5000-700$ הרץ), ו-*tweeter*---רמקול המטפל בתדרים גבוהים (במערכות איכותיות במיוחד יש *subwoofer* לתדרים נמוכים מאד). כחלק מהרמקול בונים מעגל, הנקרא *crossover*, ואשר תפקידו הוא להעביר לכל רמקול רק את תחום התדרים הנוגע לו. זאת כדי לנצל טוב יותר את אנרגיית האות, ולהמנע מלגרום נזקים לרמקולים. המעגל מיישם בדוגמה שלנו שלוש מערכות---מסנן



איור 1.3: מסנן מעביר סרט

מעביר נמוכים המעביר ל-*woofer* את התדרים הנמוכים, מסנן מעביר סרט ומסנן מעביר גבוהים המעבירים את התדרים המתאימים לרמקולים האחרים. זהו שימוש במסננים במובן הצר שלהם.

בנוסף משתמשים לעיתים במעגל החשמלי כדי לתקן עיוותים של הרמקולים. רמקול אידאלי מקבל אות חשמלי בתחום תדרים נתון, והופך אותו לאות אקוסטי ללא שינוי. כלומר תגובת המערכת היא קבועה:

$$H(\omega) = \begin{cases} K & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B_2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{1.3.4}$$

כאן K הוא ההגבר או ההנחתה של הרמקול. אולם רמקולים מעשיים כידוע אינם אידאלים. כלומר גם להם יש העדפות לתדרים מסוימים. הסיבות לתגובה לא אידאלית רבות. למשל, בתדרי תהודה של קופסת הרמקול אפשר לצפות להגבר גבוה, ובתדרים אחרים להנחתה של הקופסה. המשקל של הרמקול גורם בדרך כלל לירידה בביצועים עם עליית התדר, וכו'.

ניתן לקזז על כך במידת מה על ידי מעגל חשמלי---מסנן, שיוגדר כך. נסמן את תגובת התדר של הרמקול ב-$H_L(\omega)$. נניח שאנו יכולים ליישם מסנן אשר תגובת התדר שלו היא

$$H_F(\omega) = \begin{cases} K/H_L(\omega) & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B2} \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{1.3.5}$$

האות החשמלי נכנס למסנן ואחריו לרמקול, כלומר המערכות פועלות בטור. תגובת התדר של שתי המערכות ביחד היא לכן

$$H(\omega) = H_L(\omega)H_F(\omega) = \begin{cases} K & \omega_{B_1} < \omega < \omega_{B2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{1.3.6}$$

ובכך תיקנו התנהגות של מערכת מכנית (רמקול) על ידי מעגל חשמלי. ביחד עם המסננים, תיקון כזה יביא את הרמקול כולו לביצוע מושלם: המרת האות החשמלי לאות אקוסטי ללא כל עיוות.

דוגמה 1.3.2 יישום חשוב למסננים ספרתיים הוא מכשיר השמיעה. המכשירים החדשים הם כולם מעבדי אותות זעירים ומתוחכמים להפליא. בדוגמה זו נתאר בקצרה רק רכיב אחד שלהם---המסנן.

פגיעות בשמיעה אינן אחידות בין שתי האזניים, וכן אינן אחידות מבחינת תדרים. בדרך כלל עם הגיל יורדת תחילה השמיעה בתדרים הגבוהים. משמעויות ירידת השמיעה הן: ירידת העצמה המינימלית של אות אשר האדם מזהה כאות, ירידת היכולת להבחין ולזהות אותות מורכבים (דיבור) וכו'. מכשירי השמיעה הישנים היו מגברים: פירוש הדבר שאדם אשר נפגעה יכולת שמיעתו בתדרים גבוהים נאלץ לבחור בין החלופות הבאות: "חרשות" לצלילים גבוהים, או עוצמה בלתי נסבלת לצלילים נמוכים. מכשירי השמיעה החדשים (שהם כאמור סיפרתיים) מתוארים כ-*Multi-channel*: כלומר, יש להם מערך מסננים אשר לכל אחד מהם הגבר מתכוונן. לדוגמה, מסנן העוסק בתדרים נמוכים מאד (מאות בודדות של הרצים), מסנן בתדרים נמוכים (מאות עד אלפים בודדים), בתחום האמצעי של השמיעה (סביב 5000), ובתחום גבוה. ניסויים מראים שהפרדה כזו מועילה בהחלט ליכולת להבין ולזהות אותות מורכבים. מערכת כזו יש לכוונן: לומר להתאים את ההגבר של כל מסנן באופן כזה שהשמיעה תהיה מיטבית. כאן המסננים אינם מעבירי סרט אידאליים, בגלל הרצון למנוע שינויים גדולים (לא רציפים) בתגובת התדר. אלא כל מסנן מגביר סביב תדר מרכזי משלו, ומנחית באופן הולך וגובר עם ההתרחקות מהתדר המרכזי.

גם כאן, הנסיון בדרך כלל הוא לתקן את תגובת התדר של האוזן (אשר נפגעה) על ידי בחירת הגבר המסננים.

רכיבים נוספים במכשירי השמיעה הם רכיבים תלויי אמפליטודה. פגיעה בשמיעה פירושה אבדן היכולת לשמוע צלילים חלשים: אך אין היא משפרת את עמידתנו לצלילים חזקים. לכן (במיוחד בפגיעות קשות) יש לבנות מערכת אשר מקטינה את טווח העוצמות, מזה המקובל, לזה המותאם ליכולות האוזן. רכיב כזה הוא לא לינארי ובקורס זה לא נדון בכאלו.

נחזור לדוגמה זו בסעיף 5.5.1 לאחר שנדון בהתמרת פוריה: אז נוכל להבין אותה יותר לעומק.

פרק 2

משוואות דיפרנציאליות רגילות כמערכת

חזרה לקראת פרק זה: יש לחזור על מד"ר לינאריות עם מקדמים קבועים: פתרון הומוגני ופרטי כפי שנלמדו בקורס מד"ר, פתרונות בכניסה אפס (y_{ZIR}) ובתנאי התחלה אפס (y_{ZSR}) כפי שנלמדו בקורס מעגלים חשמליים, כולל שיטות לחישוב הפתרונות. מקורס מעגלים חשמליים---חוק אוהם.

משוואות דיפרנציאליות רגילות מהוות מודל דינמי למערכות מסוגים שונים - ממערכות מכניות, דרך מעגלים חשמליים (אנלוגיים) ועוד. בקורס זה נתייחס למשוואות כמתארות מערכת, כלומר מקבלות אות כניסה ומייצרות אות מוצא.

לאחר חזרה על מ.ד.ר ופתרונותיהן, ניתן הגדרות כלליות של תכונות של מערכות נבדוק מתי תכונות אילו מתקיימות במערכת המתוארת על ידי מ.ד.ר.

2.1 משוואות דיפרנציאליות לינאריות ופתרונן: חזרה

בפרק זה נחזור על נושא מ.ד.ר לינאריות עם מקדמים קבועים. נושא זה מכוסה בקורס הקדם מ.ד.ר ח' 131401. החידוש היחיד בסעיף זה (ביחס לקורס הקדם) הוא מושגי תגובה בתנאי התחלה אפס y_{ZSR} ותגובה בכניסה אפס y_{ZIR} .

הצורה הכללית של מ.ד.ר כזו מדרגה (או מסדר) N היא

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{2.1.1}$$

כאשר $x(t)$ הוא אות נתון---מבחינתינו הכניסה למערכת---ו- $y(t)$ היא התגובה. אנו נניח תמיד כי $a_N \neq 0$ וכן $b_M \neq 0$, כיוון שאחרת ניתן להגדיר את הסכום עם איבר אחד פחות.

הערה: בספרות מופיעה משוואה זו לעיתים בצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_{N-n} \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_{M-m} \frac{d^m x(t)}{dt^m}. \tag{2.1.2}$$

כמובן שאין הבדל מהותי, אך יש לבדוק מהו הסימון. אנו נהיה עקביים בסימון של (2.1.1).

נסמן $y^{(k)}(t) \doteq \frac{d^k y(t)}{dt^k}$.

משפט 2.1.1 בהינתן פונקציה $x(t)$ בעלת M נגזרות עבור $t \geq t_0$ וכן תנאי התחלה

$$\{y(t_0), y^{(1)}(t_0), \ldots, y^{(N-1)}(t_0)\}$$

בזמן t_0, למ.ד.ר (2.1.1) יש פיתרון יחיד $\{y(t) : t \geq t_0\}$.

הערה: נהוג לסמן ב-x את הפונקציה, אשר מקבלת ברגע t את הערך $x(t)$. סימון מתמטי נוסף עבור הפונ-קציה, בו נמעט להשתמש, הוא $x(\cdot)$, כאשר הנקודה מסמנת מקום עבור משתנה---ומשתמע שזו פונקציה. לעיתים לא נקפיד על ההבחנה ונסמן ב-$x(t)$ את הפונקציה.

טענה 2.1.2 אם y_1 פותר את (2.1.1) עבור כניסה x_1 ותנאי התחלה

$$\{y_1(t_0), y_1^{(1)}(t_0), \ldots, y_1^{(N-1)}(t_0)\},$$

ו- y_2 פותר את (2.1.1) עבור כניסה x_2 ותנאי התחלה

$$\{y_2(t_0), y_2^{(1)}(t_0), \ldots, y_2^{(N-1)}(t_0)\},$$

אזי $\alpha y_1 + \beta y_2$ פותר את (2.1.1) עבור כניסה $\alpha x_1 + \beta x_2$ ותנאי התחלה

$$\{\alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0), \alpha y_1^{(1)}(t_0) + \beta y_2^{(1)}(t_0), \ldots, \alpha y_1^{(N-1)}(t_0) + \beta y_2^{(N-1)}(t_0)\}.$$

הוכחה: נציב ב-(2.1.1) ונקבל שהמשוואה מתקיימת, בגלל לינאריות פעולת הגזירה. כמו כן מתקיימים תנאי ההתחלה. לפי משפט 2.1.1 למשוואה יש פתרון יחיד, ולכן נובע כי אכן זהו הפתרון. מ.ש.ל.

מ.ד.ר מגדירה מערכת במובן הבא: עבור אות כניסה x המ.ד.ר ביחד עם תנאי התחלה מגדירה תגובה או מוצא y. זהו הרעיון בבסיס המושג של "מערכת:" זהו תאור של קשר בין כניסה ותגובה. בהמשך נראה כיצד להתייחס לתנאי ההתחלה.

לפני שנדון במ.ד.ר כמייצגות מערכות, נחזור על שיטות בניית הפתרון למ.ד.ר. השיטה הראשונה שנדון בה היא חישוב פתרון פרטי ופתרון הומוגני.

הגדרה 2.1.3 פתרון הומוגני של (2.1.1) הוא פתרון המשוואה כאשר $x \equiv 0$ (כלומר $x(t) = 0$ לכל t).

הפתרון ההומוגני הכללי של (2.1.1) הוא פתרון הומוגני בעל N פרמטרים חפשיים, כך שבחירתם מאפשרת התאמת הפתרון לכל תנאי התחלה. נסמן פתרון כזה ב-y_h.

פתרון פרטי של (2.1.1) הוא פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון x, ללא התחשבות בתנאי ההתחלה. נסמן פתרון כזה ב-y_p.

טענה 2.1.4 ניתן למצוא פתרון למ.ד.ר (2.1.1) כך:

1. נמצא פתרון פרטי y_p,
2. נחשב את הפתרון ההומוגני הכללי y_h,

3. נחשב את ערכי הפרמטרים החופשיים של $y_h + y_p$ כך שיתאימו לתנאי ההתחלה הנתונים.

הוכחה: נובע מטענה 2.1.2. מ.ש.ל.

השיטה השניה לבניית פתרון היא על ידי חלוקה לפתרון בתנאי התחלה אפס, ולפתרון בכניסה אפס.

הגדרה 2.1.5 פתרון בכניסה אפס של (2.1.1) הוא פתרון המשוואה כאשר $x \equiv 0$, עבור תנאי ההתחלה הנתונים. נסמן פתרון כזה ב-y_{ZIR}.

פתרון בתנאי התחלה אפס של (2.1.1) הוא פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון x, ועבור תנאי התחלה השווים לאפס. נסמן פתרון כזה ב-y_{ZSR}.

טענה 2.1.6 $y \doteq y_{ZIR} + y_{ZSR}$ הוא פתרון למ.ד.ר (2.1.1).

הוכחה: נובע מטענה 2.1.2. מ.ש.ל.

נשים לב כי אם y_1 ו- y_2 פותרים את המ.ד.ר עם כניסה זהה (אך תנאי התחלה שונים) אזי $y_1 - y_2$ הוא פתרון הומוגני. הפתרון y_{ZIR} הוא, לפי הגדרתו, פתרון הומוגני (אך כמובן לא הפתרון ההומוגני הכללי). לעומת זאת y_{ZSR} הוא פתרון פרטי רק עבור תנאי התחלה אפס. כמו כן, מהמשפטים לעיל נובע כי צירוף לינארי של פתרונות הומוגניים הוא פתרון הומוגני וסכום של פתרון פרטי ופתרון הומוגני הוא פתרון פרטי.

הגדרה 2.1.7 נסמן נגזרת בעזרת "אופרטור" D, כך שאת המ.ד.ר (2.1.1) נרשום בצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n D^n y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m D^m x(t) \tag{2.1.3}$$

הפולינום האפייני של (החלק ההומוגני) של המ.ד.ר הוא הפולינום המתייחס לאות התגובה (צד שמאל) של המשוואה. הוא מתקבל מהחלפת D במשתנה, למשל λ, כלומר

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n \tag{2.1.4}$$

שרשי הפולינום האפייני הם הערכים של λ כך שהביטוי (2.1.4) שווה לאפס.

את הפתרון ההומוגני ניתן למצוא בצורה שיטתית.

משפט 2.1.8 נסמן ב-$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ את השרשים של הפולינום האפייני של המ.ד.ר. אזי הפתרון ההומוגני הכללי הוא

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i f_i(t) \tag{2.1.5}$$

כאשר הפונקציות $f_i(t)$ הן פונקציות עצמיות של המשוואה ההומוגנית (כלומר פתרונות הומוגניים), ונתונות כלהלן. אם λ_i הוא שורש בריבוי יחיד של הפולינום האפייני אזי $f_i(t) = e^{\lambda_i t}$.

נניח כי λ_i הוא שורש בריבוי $k+1$, כלומר $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_{i+k}$ ושורש זה שונה מכל השרשים האחרים, אזי $f_{i+j}(t) = t^j e^{\lambda_i t}$ עבור $0 \le j \le k$.

2.2 מערכות ומשוואות דיפרנציאליות לינאריות

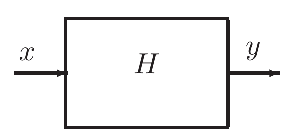
בסעיף זה נתייחס בצורה כללית יותר למערכות, כאשר מ.ד.ר משמשות כדוגמה. ראינו כי פתרון מ.ד.ר תלוי גם בכניסה וגם בתנאי התחלה. נתרכז בשלב זה בהשפעת הכניסה בלבד.

2.2.1 תכונות וסיווג של מערכות

נתבונן במערכות המגדירות קשר בין כניסה ויציאה.

הגדרה 2.2.1 מערכת מיפוי כניסה-יציאה *Input Output Map—IOM* היא מיפוי, שיסומן ב-Φ, בין מרחב (אוסף) אותות הכניסה, שנסמן ב-$\mathbb{X}$, לבין מרחב (אוסף) אותות היציאה, אשר נסמן ב-$\mathbb{Y}$.

לצורך המחשה אנו נתשמש בסימון הבא: נקרא למערכת H. נסמן את הקשר דרך השרטוט



איור 2.1: מערכת מיפוי כניסה יציאה

ונסמן זאת גם כ-$y = \Phi(x)$, כאשר סימון זה מדגיש את הקשר בין האותות. לעיתים נסמן זאת גם כך: $y(t) = \Phi[x](t)$. סימון זה יש להבין כך: תחילה פועל המיפוי Φ על האות כולו. כאשר נרצה לדעת את הערך של התוצאה y ברגע נתון t, נציב את t בתוצאת המיפוי, שהיא בעצמה פונקציה (אות).

בהמשך נעסוק בעיקר במערכות מיפוי כניסה יציאה, ולכן לא נציין עובדה זו במפורש: ההנחה היא שאם לא נאמר אחרת, המערכת הנדונה היא מסוג מיפוי כניסה יציאה.

דוגמה 2.2.2 נתבונן במשוואה דיפרנציאלית עבורה מרחב אותות הכניסה והיציאה $\mathbb{X}$ ו-$\mathbb{Y}$ הם אותות על ציר הזמן החיובי (כלומר מוגדרים מ-0 והלאה). אם נדרוש תנאי התחלה, למשל, אפס בזמן אפס, אזי נקבל מערכת מיפוי כניסה יציאה. זאת משום שלכל כניסה תתאים יציאה אחת בדיוק.
לעומת זאת, אם לא נגדיר תנאי התחלה, אזי לכל כניסה תהיינה תגובות רבות אפשריות, וזו אינה מערכת מיפוי כניסה יציאה.

אחד המאפיינים של אות ומערכת הוא סוג ציר הזמן.

הגדרה 2.2.3 אות נקרא אות בזמן בדיד אם ציר הזמן שלו בדיד; נסמן אות כזה ב-$x(n)$ כאשר משתנה הזמן n מקבל ערכים בדידים. אם ציר הזמן רציף, נקרא לו אות בזמן רציף.
מערכת בזמן בדיד היא מערכת שהכניסה וכן היציאה שלה הם אותות בזמן בדיד.
מערכת נקראת דינמית אם אותות הכניסה והיציאה הם אותות זמניים.
מערכת בזמן רציף היא מערכת שהכניסה וכן היציאה שלה הם אותות בזמן רציף.
מערכת היברידית היא מערכת עבורה אחד האותות הוא בזמן בדיד והשני בזמן רציף.

אות בזמן בדיד הוא למעשה סידרה: $x(n_0), x(n_0+1), \ldots, x(n_1)$ הוא אות בזמן בדיד על ציר זמן סופי. ציר הזמן יכול להיות גם חצי אין-סופי (למשל מ-n_0 עד ∞), או אין סופי.

דוגמה 2.2.4 המערכת המוגדרת על ידי (2.1.1) היא כמובן מערכת דינמית בזמן רציף.
דוגמה למערכת שאינה דינמית היא מערכת המתוארת על ידי משוואה אלגברית עם כניסה x ותגובה y:

$$y = Ax \tag{2.2.1}$$

כאשר A היא מטריצה, ו-x, y הם וקטורים.
המערכת המוגדרת על ידי

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) \tag{2.2.2}$$

היא מערכת בזמן בדיד שכן אות הכניסה ואות התגובה הם אותות בזמן בדיד (המשוואה (2.2.2) נקראת משוואת הפרש, ונלמד על משוואות כאלו בפרק *10*). זוהי כמובן מערכת כניסה יציאה. מערכת הדוגמת אות רציף היא מערכת היברידית: למשל טלפון סיפרתי. הוא מקבל אותות קול (אות בזמן רציף) ומתרגם אותו לסידרת מספרים (אות בזמן בדיד).

עבור המערכת המוגדרת על ידי (2.1.1) $x(t)$ הוא מספר (סקלר, אולי מרוכב), וגם התגובה y היא חד ממדית.

הגדרה 2.2.5 מערכת *SISO: Single Input Single Output* היא מערכת אשר הכניסה וכן התגובה הן חד-ממדיות.
מערכת נקראת *MIMO: Multiple Input Multiple Output* אם הכניסה וכן היציאה הם וקטורים.
בצורה דומה מוגדרות מערכות *SIMO* ו-*MISO*.

הגדרה 2.2.6 זכרון. מערכת נקראת חסרת זיכרון אם היציאה בזמן t תלויה בערכי הכניסה רק דרך הערך בזמן t.

הגדרה זו היא בעלת משמעות כמובן רק למערכות דינמיות.

דוגמה 2.2.7 המערכת המוגדרת על ידי (2.1.1) היא כמובן מערכת עם זיכרון משום שידיעת הערך של אות הכניסה ברגע מסויים (ואפילו ידיעת כל נגזרותיו) אינה מספיקה לצורך חישוב התגובה באותו רגע.
המערכות

$$y(t) = 2x(t) \qquad y(t) = x^2(t) + (t+1)^2 \tag{2.2.3}$$

הן אמנם דינמיות, אך חסרות זיכרון.
המערכות

$$y(t) = x(t-1)\ , \qquad y(t) = x(t+1) \tag{2.2.4}$$

הן בעלות זיכרון שכן לצורך חישוב התגובה ברגע t עלינו לדעת את ערך הכניסה ברגע אחר (מוקדם יותר למערכת השמאלית, ומאוחר יותר לימנית).
המערכות המוגדרות על ידי (2.1.1) ועל ידי (2.2.2) הן כמובן בעלות זיכרון.

מערכת נקראת סבתית אם בכל רגע t התגובה $y(t)$ תלויה רק בערכי הכנעסה בעבר ובהווה. הגדרה זו בעייתית מבחינה מתמטית: למשל מערכת שהיא גוזר, לפי הגדרה כזו, אינה סיבתית שכן לצורך גזירה עלינו לדעת את ערכי הכניסה מעט מעבר להווה (הזכרו בהגדרה של נגזרת). לכן יש צורך בהגדרה מסובכת יותר.

הגדרה 2.2.8 מערכת נקראת סיבתית *Causal, Non anticipative* אם לכל t_0 ו-$t < t_0$, ערך היציאה $y(t)$ בזמן t תלוי בערכי הכניסה רק דרך הערכים בעבר ובהווה, כלומר ב-$\{x(s),\ \ s < t_0\}$.
מערכת נקראת אנטי סיבתית אם כאשר נהפוך את ציר הזמן נקבל מערכת סיבתית.

דוגמה 2.2.9 המערכת (2.2.2) היא כמובן מערכת סיבתית.
מ.ד.ר יכולה לתאר מערכת סיבתית (למרות שאפשר להשתמש בה גם לתאור מערכת אנטי-סיבתית, כלומר כזו שהיציאה תלויה רק בהווה ובעתיד).
המערכות מדוגמה *2.2.7* הן כולן סיבתיות, אך המערכת

$$y(t) = x(t+1) \tag{2.2.5}$$

בברור אינה סיבתית שכן ערך התגובה תלוי בערך עתידי של הכניסה.
המערכת

$$y = \frac{dx}{dt} \tag{2.2.6}$$

היא סיבתית לפי הגדרתינו. למעשה, ההגדרה מסובכת מאשר נראה נחוץ בדיוק כדי לאפשר התייחסות למערכות מסוג זה: כדי לדעת את ערך הנגזרת ברגע t עלינו לדעת את ערכי $x(s)$ סביב t, אך גם מעט לאחר t. אם נגביל את מרחב הכניסה לאותות גזירים ברציפות, אזי מספיק לחשב נגזרת שמאלית, וההגדרה האינטואיטיבית נותנת תשובה נכונה. נשים לב כי המערכת (2.2.6) היא סיבתית וגם אנטי סיבתית, אך היא אינה חסרת זכרון כיוון שהתגובה אינה תלויה רק בערך הרגעי של הכניסה, אלא גם בערכים סביב t.

רוב המערכות הפיזיקליות הן כמובן סיבתיות. אולם לעיתים נוח לבנות מודלים שאינם סיבתיים. בהקשר של עיבוד תמונות, כמובן שמושג הסיבתיות אינו רלוונטי. אך גם באותות אחרים, אם למשתנה t אין מובן פיזיקלי של זמן, אזי תיתכן מערכת פיזיקלית שאינה סיבתית.

הגדרה 2.2.10 מערכת נקראת לינארית אם לכל זוג אותות כניסה x_1, x_2 וקבועים α, β מתקיים

$$\Phi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\Phi(x_1) + \beta\Phi(x_2).$$

כלומר, התגובה לסכום כניסות היא סכום התגובות לכניסות הנפרדות.

מההגדרה נובע מייד כי המערכת (2.2.2) מתארת מערכת לינארית. בצורה דומה המערכת (2.2.6) גם היא לינארית.

מערכת היא לינארית אם ורק אם היא מקיימת את שתי התכונות הבאות:
אדיטיביות (Additivity): $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$, ו-
הומוגניות Homogeneity: $\Phi(\alpha x) = \alpha\Phi(x)$

לדוגמה, המערכת $y = Re[x]$ אשר היציאה בה היא החלק הממשי של הכניסה, מקיימת את תכונת האדיטיביות. אולם אם α הוא מספר מרוכב אזי $Re[\alpha x] \neq \alpha Re[x]$ שכן צד שמאל הוא מספר ממשי וצד ימין מספר מרוכב. לכן זו אינה מערכת לינארית במצב שאנו מתירים מקדמים מרוכבים.

הערה מתמטית: שימו לב כי שאלת הלינאריות דורשת לא רק מידע לגבי המערכת, אלא גם לגבי הסקלרים המותרים: ממשיים, מרוכבים, וכו'. אנו נניח סקלרים מרוכבים אלא אם נאמר אחרת.

תכונת הלינאריות היא תכונה בעלת משמעות רבה. היא תאפשר לנו בין השאר לנתח תגובה לאותות מסובכים על ידי פירוקם לאוסף של אותות פשוטים יותר.

המערכת $y = a \cdot x + b$ אינה לינארית אם $b \neq 0$, כיוון ש-

$$\Phi(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) + b \neq ax_1 + b + ax_2 + b = \Phi(x_1) + \Phi(x_2).$$

הגדרה 2.2.11 מערכת נקראת אפינית *Affine* אם קיימת מערכת לינארית Ψ כך ש-$\Phi[x] - \Phi[z] = \Psi[x - z]$.

המערכת $y = a \cdot x + b$ לעיל היא אפינית---$\Psi(x) = ax$. המערכת המתוארת על ידי (2.1.1) עם תנאי התחלה קבועים ונתונים היא מערכת אפינית: אם נחשב תגובה לשני אותות כניסה, כאשר תנאי ההתחלה הם זהים, אזי ההפרש יקיים את (2.1.1) עבור תנאי התחלה אפס---וזו כידוע מערכת לינארית. כלומר, משוואה דיפרנציאלית אינה מתארת מערכת לינארית ביחס לכניסה, בגלל השפעת תנאי ההתחלה. (כדי לראות זאת, נחשוב על (2.1.1) כאשר $b_m = 0$ לכל m ותנאי ההתחלה שונים מאפס).

דרך אחת לקבל תכונת לינאריות במ.ד.ר היא על ידי התייחסות למערכת בתנאי התחלה אפס, כלומר התייחסות לפתרון y_{ZSR} בלבד. לדרך זו יש חסרון: אנו נאלצים לבחור זמן קבוע בו מוגדרים תנאי ההתחלה. נתגבר על כך דרך המושגים הבאים.

הגדרה 2.2.12 אות חד צדדי. נקרא לאות $x(t)$ חד צדדי ימני אם קיים זמן t_x (התלוי באות) כך ש-$x(s) = 0$ לכל $s < t_x$. בצורה דומה נגדיר אות חד צדדי שמאלי.

הפונקציה

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

נקראת פונקצית מדרגה, והיא פונקציה ימנית (פונקציה זו אינה מוגדרת ב-$t = 0$, מסיבה שנעמוד עליה בפרק *3.3*).

כל פונקציה ימנית מקיימת $x(t) = x(t) \cdot u(t - t_x - \alpha)$ לכל α חיובי, מכיון ש-u בצד ימין מתאפסת רק כאשר x מתאפס. בצורה דומה פונקציה שמאלית מקיימת $x(t) = x(t) \cdot u(t_x + \alpha - t)$.

אם לא נתייחס במפורש לזמן t_x אזי הכוונה היא ש-$t_x = 0$. לדוגמה אות חד צדדי ימני הוא אות המתאפס משמאל ל-0.

הגדרה 2.2.13 נאמר שמערכת המתוארת על ידי מ.ד.ר היא במנוחה התחלתית *(Initially At Rest)* אם תגובת המערכת לאות ימני המתאפס עבור $s < t_x$ היא אפס עד תחילת הכניסה, כלומר היא מקיימת $y(s) = 0$ עבור $s < t_x$.

טענה 2.2.14 מ.ד.ר הנמצאת במנוחה התחלתית מתארת מערכת לינארית.

הוכחה: נשים לב כי סכום אותות ימניים הוא אות ימני. מהגדרת מערכת במנוחה התחלתית, תנאי ההתחלה הם אפס עבור זמן מוקדם מספיק. לכן הלינאריות נובעת מטענה 2.1.2. מ.ש.ל.

הגדרת מנוחה התחלתית מזכירה לנו את הגדרת הסיבתיות: אין תגובה לפני השפעת הכניסה. ואכן, עבור מערכות לינאריות (ועבורן בלבד) המושגים זהים:

משפט 2.2.15 מערכת לינארית היא סיבתית אם ורק אם היא במנוחה התחלתית.

הוכחה: נניח שהמערכת במנוחה התחלתית. נתבונן בשני אותות כניסה $x_1(t),\ x_2(t)$ המקיימים עבור זמן t_0 כלשהוא

$$x_1(t) = x_2(t) \quad t < t_0, \tag{2.2.8}$$

$$x_1(t) \neq x_2(t) \quad t > t_0. \tag{2.2.9}$$

נסמן ב- $y_i(t)$ את תגובת המערכת לכניסה $x_i(t)$. מהלינאריות נובע כי עבור הכניסה $x_1(t) - x_2(t)$ התגובה תהיה $y_1(t) - y_2(t)$. כיוון ש- $x_1(t) - x_2(t) = 0$ עבור $t < t_0$, מתכונת המנוחה התחלתית נובע כי $y_1(t) - y_2(t) = 0$ עבור $t < t_0$. קיבלנו אם כך ש- $y_1(t) = y_2(t)$ עבור $t < t_0$, או - התגובה בזמן t_0 אינה תלויה בערכים עתידיים של הכניסה. כלומר המערכת סיבתית.

בכיוון השני נניח שהמערכת סיבתית. כדי להראות מנוחה התחלתית, נקבע אות כניסה $x(t)$ המקיים $x(t) = 0$ עבור $t < t_0$ ונראה כי גם התגובה $y(t)$ מקיימת $y(t) = 0$ עבור $t < t_0$. נגדיר $x_1(t) \equiv 0$ ונסמן ב- $y_1(t)$ את התגובה ל- $x_1(t)$. מהסיבתיות נובע כי התגובה $y(t) - y_1(t)$ לכניסה $x(t) - x_1(t)$ שווה ל- $y(t)$ עבור $t < t_0$ שכן האותות זהים בתחום זה. מצד שני מהלינאריות $y_1(t) \equiv 0$ (תגובת מערכת לינארית לכניסת פס היא תמיד אפס). לכן $y(t) = 0$ עבור $t < 0$ והמערכת במנוחה התחלתית. מ.ש.ל.

נראה כעת דרך דוגמה כי מד"ר שאינה במנוחה התחלתית יכול להתנהג בצורה מפתיעה.

דוגמה 2.2.16 נתבונן במד"ר מסדר ראשון

$$y'(t) + 2y(t) = x(t)\ . \tag{2.2.10}$$

ראשית, ראינו שאם נתון תנאי התחלה $y(0) \neq 0$ אזי המערכת אינה לינארית (ביחס לכניסה!)---ראה משפט *2.1.2*.

אם נתון תנאי התחלה בזמן קבוע, למשל $y(0) = 0$ אזי המערכת אינה סיבתית. לדוגמה, נגדיר

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

$$x_2(t) \equiv 0\ . \tag{2.2.12}$$

אזי קל לבדוק שהתגובה ל- x_1 היא

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) & -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{2}\left(e^{-2} - 1\right)e^{-2t} & t \leq 0\ . \end{cases} \tag{2.2.13}$$

כמובן ש- $y_2(t) \equiv 0$. אנו רואים כי עבור כל $t < -1$ התגובה בזמן t תלויה בכניסה בעתיד!

הבה נראה כי תנאי הלינאריות במשפט הקודם הוא חשוב.

דוגמה 2.2.17 המערכת הבאה אינה לינארית, אינה סיבתית אך היא במנוחה התחלתית:

$$y(t) = x(t)x(t+1)\ . \tag{2.2.14}$$

לעומתה המערכת הבאה אינה לינארית, סבתית אך אינה במנוחה תחלתית:

$$y(t) = x(t) + 1\ . \tag{2.2.15}$$

הגדרה 2.2.18 נסמן ב-σ^s אופרטור המזיז את האות בזמן בכמות s, כלומר

$$\sigma^s x(t) \doteq x(t+s). \tag{2.2.16}$$

מערכת נקראת קבועה בזמן $Time\ Invariant—TI$ אם

$$\Phi(\sigma^s x) = \sigma^s \Phi(x) \tag{2.2.17}$$

כלומר התגובה לכניסה מוזזת היא התגובה המקורית, מוזזת באותה כמות.

באופן מתמטי, מערכת היא קבועה בזמן אם המיפוי שלה מתחלף עם אופרטור ההזזה.

רוב המערכות בהן נעסוק הן מערכות לינאריות קבועות בזמן (לק"ב)---מערכות Linear Time Invariant (LTI).

המערכת $\Phi(x)(t) = t \cdot x(t)$ כמובן אינה קבועה בזמן כי, לפי ההגדרה,

$$\begin{aligned}
\sigma^s\left(\Phi[x]\right)(t) &= \sigma^s\left(tx(t)\right) && (2.2.18)\\
&= (t+s)x(t+s) && (2.2.19)\\
&\neq tx(t+s) && (2.2.20)\\
&= \Phi[\sigma^s x](t)\ . && (2.2.21)
\end{aligned}$$

מצד שני,

טענה 2.2.19 מ.ד.ר הנמצאת במנוחה התחלתית מתארת מערכת קבועה בזמן.

הוכחה: נקבע s ונשים לב כי אם x הוא אות ימני אזי גם $\sigma^s x$ הוא אות ימני. נסמן ב-$y = \Phi x$. קל לראות כי $\sigma^s y$ פותר את (2.1.1) עבור כניסה $\sigma^s x$. בנוסף, תנאי ההתחלה הם זהים אך בזמן המוזז ב-s. לכן $\sigma^s y$ הוא התגובה לכניסה $\sigma^s x$. מ.ש.ל.

נזכר כי D מסמן את אופרטור הגזירה.

טענה 2.2.20 עבור מערכת מד"ר במנוחה התחלתית, התגובה לנגזרת הכניסה היא נגזרת התגובה, כלומר

$$\Phi\left(\frac{d}{dt}x\right)=\frac{d}{dt}\Phi(x)\,. \tag{2.2.22}$$

כלומר אופרטור הגזירה מתחלף עם אופרטור המערכת.

הוכחה: נשים לב כי אם הכניסה x מתאפסת עד רגע מסויים, נאמר t_0, אזי כך גם dx/dt. נסמן ב-$y=\Phi(x)$ את התגובה לכניסה x. נציב $x_1=dx/dt$ ו-$y_1=dy/dt$ ב-(2.1.1) ונקבל שהכניסה x_1 והתגובה y_1 מקיימים את המשוואה. מ.ש.ל.

הגדרה 2.2.21 מערכת מיפוי כניסה יציאה Φ נקראת הפיכה אם קיימת מערכת מיפוי Ψ בין מרחב אותות היציאה למרחב אותות הכניסה, המשחזרת את אות הכניסה. כלומר, אם קיימת מערכת כך שלכל x

$$\Psi(\Phi[x])=x\,. \tag{2.2.23}$$

דוגמה 2.2.22 המערכת הטריוואלית

$$\Phi(x)=x \tag{2.2.24}$$

היא ודאי הפיכה. המערכת

$$y(t)=x^n(t-1) \tag{2.2.25}$$

היא הפיכה לכל n אי זוגי, אך אינה הפיכה עבור n זוגי. המערכת

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \tag{2.2.26}$$

אינה הפיכה שכן היא מתעלמת מקבועים:

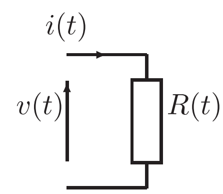
$$\Phi[x]=\Phi[x+\alpha] \tag{2.2.27}$$

ולכן ברור שלא ניתן לשחזר את x מתוך ידיעת y. המערכת

$$\frac{dy(t)}{dt}=x \tag{2.2.28}$$

הנמצאת במנוחה התחלתית היא הפיכה אם מרחב אותות הכניסה הוא אוסף האותות הימניים.

לסיכום, ראינו כי מערכת המתוארת על ידי מד"ר, הנמצאת במנוחה התחלתית, מתארת מערכת דינמית בזמן רציף, שהיא מיפוי כניסה יציאה, SISO, בעלת זיכרון, סיבתית, לינארית וקבועה בזמן, אשר אינה בהכרח הפיכה.



איור 2.2: דוגמה: מערכת חשמלית

2.3 דוגמה מסכמת למשוואות דיפרנציאליות ותכונות של מערכות

נתבונן במערכת בה הכניסה היא זרם i המועבר דרך נגד R. התגובה היא מתח הנגד v.
הקשר בין הזרם והמתח נתון על ידי

$$v(t) = R(t)i(t). \tag{2.3.1}$$

ננתח את תכונות המערכות עבור סוגים שונים של נגדים.

I. $R = R_0$ קבוע.

מערכת זו חסרת זכרון, קבועה בזמן, ולינארית.

II. $R(t) = R_0 + f(t)$ כאשר $f(t)$ מתארת את שינוי ההתנגדות עקב הזדקנות הנגד.

במערכת זו ערך התגובה תלוי בכניסה רק דרך ערכה הנוכחי, ולכן המערכת חסרת זכרון. המערכת אינה קבועה בזמן שכן לפי (2.3.1),

$$\sigma^s\Phi[i](t) = \sigma^s v(t) = \sigma^s[(R_0 + f(t))i(t)] = (R_0 + f(t+s))i(t+s) \neq (R_0 + f(t))i(t+s) = \Phi[\sigma^s i](t). \tag{2.3.2}$$

נבדוק לינאריות:

$$\Phi[\alpha x_1 + \beta x_2](t) = (R_0 + f(t))(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \tag{2.3.3}$$

$$= (R_0 + f(t))\alpha x_1(t) + (R_0 + f(t))\beta x_2(t) = \alpha\Phi[x_1](t) + \beta\Phi[x_2](t) \tag{2.3.4}$$

בדיוק לפי הגדרת הלינאריות.

III. $R(t) = R_0 + i^2(t)$. זהו נגד שערכו תלוי זרם. אם R_0 גדול מספיק אזי הנגד הוא בקירוב נגד רגיל עבור ערכי זרם קטנים, אך לא עבור ערכים גדולים.

מערכת זו היא חסרת זכרון. היא קבועה בזמן שכן

$$\sigma^s\Phi[i](t) = \sigma^s v(t) = \sigma^s[(R_0 + i^2(t))i(t)] = (R_0 + i^2(t+s))i(t+s) = \Phi[\sigma^s i](t). \tag{2.3.5}$$

נבדוק לינאריות:

$$\Phi[\alpha x_1 + \beta x_2](t) = (R_0 + (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^2)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \tag{2.3.6}$$

$$\neq (R_0 + x_1^2(t))\alpha x_1(t) + (R_0 + x_2^2(t))\beta x_2(t) = \alpha\Phi[x_1](t) + \beta\Phi[x_2](t) \tag{2.3.7}$$

ולכן המערכת אינה לינארית.

IV. $R(t) = R_0 + \alpha \int_{-\infty}^{t} i^2(\tau)\, d\tau$.

ברור כי זאת מערכת עם זכרון. כמו בחישובים הקודמים ניתן לראות כי המערכת קבועה בזמן, אך אינה לינארית.

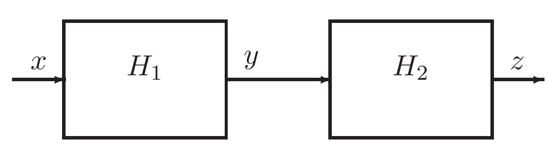
כיוון שכל התגובות תלויות רק בערכים קודמים של הכניסה, נובע כי כל המערכות סיבתיות.

2.4 מערכות: מעבר למשוואות דיפרנציאליות

מתבקשת השאלה מדוע לא להסתפק בתאור מערכות על ידי משוואות דיפנציאליות. מנסיונינו אנו יודעים כי ניתן לתאר כל מעגל חשמלי לינארי דרך משוואות כאלו. בקורס פיזיקה 1 למדנו כי ניתן לתאר תנועה של גופים על ידי משוואה דיפרנציאלית.

מעבר לחשיבות של תאור בתחום התדר, בסעיף זה נביא שיקול הנדסי חשוב לחפש כלים נוספים.

למהנדס חשוב לתאר מערכת כ"קופסה שחורה", אליה מכניסים אות כניסה ומקבלים אות תגובה. כדי להגיע לתכנון יעיל ולהשתמש בתכנונים קיימים, יש צורך בכלים המאפשרים חיבור של "קופסאות שחורות" כאלו. בצורה סכמתית, נניח שנתונות שתי מערכות אשר יסומנו ב-$H_1,\ H_2$. נניח שכל אחת מתוארת על ידי משוואה דיפרנציאלית בצורה (2.1.1). נגדיר חיבור מערכות בטור בצורה הבאה. אות הכניסה למערכת הראשונה, H_1, הוא x. תגובת המערכת היא y. תגובה זו מהווה כניסה למערכת השניה H_2, והמוצא מהמערכת השניה הוא z. נסמן חיבור זה בצורה הבאה:



איור 2.3: חיבור מערכות בטור

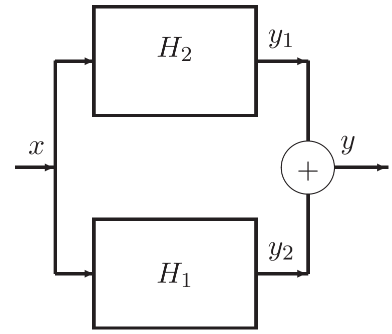
נחשוב על המערכת הכוללת, זו שכניסתה x והמוצא שלה הוא z. האם ניתן לתאר אותה בעזרת משוואה דיפרנציאלית? אם כן, מהו סדר המשוואה וכיצד לחשב את מקדמיה? אין לנו שיטה פשוטה לעשות זאת. נצטרך לפתור כל מערכת בנפרד, ואז לחשב את התגובה המשולבת. שיטה זו טובה לכניסה מסוימת אך אינה נותנת תאור של המערכת הכוללת.

חיבור במקביל מתואר בצורה סכימתית בשרטוט הבא.

כאן לשתי המערכות כניסה משותפת. נגדיר מערכת מסכמת אשר המוצא שלה הוא $y_1 + y_2$. האם ניתן לתאר אותה בעזרת משוואה דיפרנציאלית? אם כן, מהו סדר המשוואה וכיצד לחשב את מקדמיה?

באופן כללי, כיצד ניתן לתאר את המערכת המתקבלת מחיבור מערכות כאילו? כמובן שנרצה כלי שיאפשר חיבור כללי ומורכב יותר.

כאשר נלמד בפרק 3 על מערכות קונוולוציה, נראה כי בייצוג זה קל לתאר חיבור בטור וחיבור במקביל (עם סיכום) של מערכות. נוכל לכן לקבל מערכות המתוארות על ידי מד"ר, לחשב את הייצוג שלהן כמערכות



איור 2.4: חיבור מערכות במקביל

קונוולוציה, ובכך לפתור את בעית היצוג של חיבור מערכות. אך גם לשיטה זו יש מגבלות כפי שנראה בהמשך. תיאור המערכת בתחום התדר (פרקים 5--6) נותן כלי כללי ונוח לטיפול בחיבורי מערכות מסוג זה.

פרק 3

מערכות אינטגרליות ומערכות קונוולוציה.

חזרה לשעור זה: תכונות אנטגרל - לינאריות. אינטגרציה בחלקים. קונוולוציה (לפי קורס פוריה). פונקציית דלתה (לפי פוריה ומעגלים חשמליים). קבל---מטען זרם ומתח. הגדרת נגזרת לפי קורס חדו"א, פונקציות גזירות וכלל השרשרת. איטגרציה והחלפת משתנים במימד 1.

בפרק זה נעסוק במערכות כניסה יציאה המוגדרות דרך אינטגרל:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)x(s)\,ds\ . \tag{3.0.1}$$

הפונקציה K קובעת כמובן את התנהגות המערכת, והיא נקראת "גרעין" (kernel). כמקרה פרטי נדון במ-ערכת קונוולוציה, שהגדרתה היא

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)\,ds\ . \tag{3.0.2}$$

מערכת זאת מוגדרת על ידי קונוולוציה בין אות הכניסה לבין פונקציה h המייצגת את המערכת. החקירה של מערכות מסוג זה נשענת על כלי מתמטי הנקרה פונקצית דלתה של דירק. נחזור אם כן על הרקע ההנדסי לפונקציה זו.

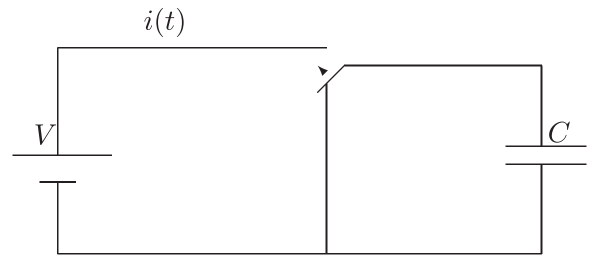
3.1 פונקצית דלתה

נתבונן במערכת עם קבל אידיאלי ומקור מתח אידאלי:

המצב ההתחלתי של הקבל הוא---ללא מטען, כלומר מתח אפס. ברגע $t=0$ מועבר המתג למצב העליון, מחבר את המקור והקבל נטען. כיון שהקבל והמקור הם אידאליים אין כל התנגדות חשמלית במערכת ואנו מצפים להתנהגות הבאה. לפני רגע 0 המתח על הקבל הוא אפס והזרם הוא אפס. אחרי רגע 0 מתח הקבל הוא V והזרם שוב 0. אם כך, אין שום פרק זמן בו יש זרם. מצד שני, המטען על בקבל מקיים

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)\,dt = C\cdot V. \tag{3.1.1}$$

אם כך אנו זקוקים לאות זרם אידאלי (לא פיזיקלי!) שיקיים את שתי התכונות: האות מתאפס פרט לרגע 0, והאנטגרל על האות שונה מאפס. אות כזה הומצא על ידי הפיסיקאים ונקרא פונקציית דלתה של דירק. הסימון הוא $\delta(t)$.

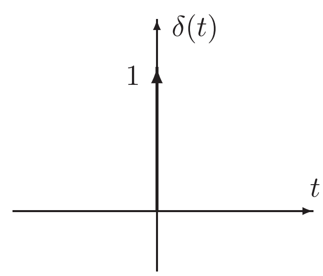


איור 3.1: המחשה: פונקצית דלתה

פונקצית דלתה היא תאור אידאלי של פולס קצר מאד סביב אפס, אך גבוה מאד כך ששיטחו הוא 1. התכונות החשובות כאשר חושבים על קירוב זה הן: האות חיובי, הוא מתאפס פרט לסביבה קטנה של אפס, ושיטחו הכולל הוא 1 כלומר

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1. \tag{3.1.2}$$

צורתו המדוייקת אינה חשובה לצרכינו. נסמן פונקציה זו כך:



איור 3.2: פונקצית δ

מקובל לקרב את פונקצית הדלתה למשל על ידי

$$f_s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |t| < \varepsilon \text{ אם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{3.1.3}$$

$$f_t(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot(t+\varepsilon) & -\varepsilon \le t \le 0 \\ \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot(\varepsilon - t) & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

$$f_b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2}. \tag{3.1.5}$$

האות הראשון הוא קירוב לפונקצית דלתה על ידי גל מרובע, השני קירוב על ידי משולש והשלישי קירוב פעמון גאוסי. קל לראות כי בכל אחד מהמקרים זהו אכן קירוב לשתי התכונות. שני האותות הראשונים מתאפסים פרט לסביבה קטנה של 0, והשלישי קטן מאד פרט לסביבה קטנה של אפס (וניתן להקטין את

הסביבה כרצונינו על ידי בחירת ε קטן). בנוסף, האינטגרל על כל אחת מהפונקציות הוא 1. יתרה מכך, נניח ש-g היא פונקציה רציפה סביב 0. אזי לכל אחד מהקרובים

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)g(t)\,dt \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)g(0)\,dt = g(0) \tag{3.1.6}$$

כאשר השיוויון הראשון הוא מהגדרת f, השני בגלל הרציפות של g והשלישי שוב מהגדרת f.

כמובן שאיכות הקירוב ב-(3.1.6) תלויה בגודל של ε אך גם ב-g.

3.2 פונקצית דלתה ומערכת קונוולוציה.

לפני שנשקיע זמן בהבנה מעמיקה יותר של פונקצית דלתה, נראה את שימושיה. ראשית, נשים לב כי לכל פונקציה רציפה g,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\delta(s)\,ds = g(t)\ . \tag{3.2.1}$$

השיוויון נובע מהגדרת פונקצית הדלתה, כאשר אנו מתבוננים על $g(t-s)$ כפונקציה של המשתנה s. האנטגרל יתן לכן את ערך הפונקציה $g(t-s)$ כאשר $s=0$, כלומר $g(t)$. בפרט, נפעיל שוויון זה על הגדרת מערכת קונוולוציה (3.0.2) ונקבל

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\delta(s)\,ds\,. \tag{3.2.2}$$

כלומר אם מערכת קונוולוציה מתוארת על ידי (3.0.2), אזי בהכרח הפונקציה h היא תגובת המערכת לכניסת דלתה.

3.3 פונקציות מוכללות.

ראינו "פונקציה" מוכללת אחת, היא הדלתה של דירק. התאוריה הכללית של פונקציות מוכללות אינה פשוטה. לכן נתרכז בתאור כללי וכן ב"חוקי המשחק:" מה מותר ומה אסור לעשות עם פונקציות מוכללות.

נשאף למצוא הכללה של מושג הפונקציה, כך שנוכל להשתמש בכלים שאנו מכירים ולהרחיבם. בפרט נרצה לטפל בדלתה. כדי שנוכל להתייחס אליה ככניסה למערכת המתוארת על ידי מ.ד.ר, נצטרך להגדיר נגזרות של דלתה. בנוסף נראה בהמשך (בהקשר של התמרות פוריה) עוד יצורים מסוג דומה.

כמובן שנרצה שפונקציות מוכללות אילו יקיימו את התכונות הרגילות: פעולות אלגבריות בין פונקציות, אינטגרלים, וכו'.

3.3.1 פונקציות מוכללות---הגדרה

נתחיל באבחנה כי ניתן לאפיין פונקציות דרך אינטגרלים. בהנתן פונקציה f, האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt. \tag{3.3.1}$$

מגדיר מערכת לינארית אשר מרחב אותות הכניסה שלה $\mathbb{X}$ הוא אוסף פונקציות $\{\phi\}$ של משתנה הזמן, ואותות היציאה הם מספרים. אם יודעים את כלל המספרים הללו, יש בכך איפיון של הפונקציה f, במובן

הבא. אם שתי פונקציות f, g אינן שוות, אזי נמצא אינטרוול שנסמן ב-$[T, S]$ בו, למשל, f גדולה יותר. נבחר את ϕ כך:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & T \le t \le S \text{ אם} \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{3.3.2}$$

עבור פונקציה זו נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) f(t)\, dt > \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) g(t)\, dt\,. \tag{3.3.3}$$

הדרך הטיבעית להכליל זאת, אם כך, היא לחשוב על פונקציות מוכללות כעל מערכות לינאריות כאלו. מערכות כאלו הם מקרה פרטי של מה שהמתמטיקאים קוראים "פונקציונלים לינאריים". דוגמה חשובה למערכת/פונקציונל כזה הוא פונקציה חסומה, הפועלת בתוך אינטגרל. כלומר הפעולה של הפונקציונל, הקשור לפונקציה f, אשר פועל על פונקציה ϕ מוגדרת דרך האינטגרל (3.3.1). כדי למצוא מושג כללי יותר מפונקציה, בשלב ראשון נגביל את מרחב אותות הכניסה לאוסף הנקרא פונקציות הבוחן של שוורץ Schwartz Test functions (על שם המתמטיקאי Laurent Schwartz). נהוג לסמן אוסף זה ב-$\mathbb{S}$. זהו אוסף הפונקציות אשר להן נגזרות מכל סדר, ובנוסף הן ונגזרותיהן דועכות (כאשר $|t|$ גדול) מהר יותר מכל פולינום. הגדרתו היא

הגדרה 3.3.1 האוסף $\mathbb{S}$ הוא אוסף הפונקציות ϕ המקיימות את התכונות הבאות. ל-ϕ קיימות נגזרות מכל סדר, ולכל זוג שלמים n, m מתקיים

$$\lim_{|t|\to\infty} t^n D^m \phi(t) = 0.$$

לדוגמה הפונקציות $t^k e^{-t^2}, e^{(-t^2 - j\omega t)}$ הן ב-$\mathbb{S}$ עבור כל k לא שלילי ו-ω ממשי. מסתבר כי אינטגרלים כמוגדר ב-(3.3.1) מגדירים חד משמעית את f, במובן הבא.

טענה 3.3.2 אם f, g הן שתי פונקציות חסומות עבורן

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)\, dt$$

לכל פונקצית בוחן, אזי $f(t) = g(t)$ בכל נקודה בה שתיהן רציפות. בנוסף, האנטגרלים יהיו שווים גם לפונקציות שאינן פונקציות בוחן.

ההגדרה המדויקת של פונקציה מוכללת היא

הגדרה 3.3.3 פונקציה מוכללת *(Tempered distribution)* f היא פונקציונל לינארי הפועל על פונקציות הבוחן של שוורץ, והוא רציף במובן הבא. אם ϕ_k היא סדרה של פונקציות בוחן השואפות לאפס במובן שלכל שלמים n, m חיוביים

$$\lim_{k\to\infty} \sup_t |t^n D^m \phi_k(t)| = 0, \tag{3.3.4}$$

ואם α_k הוא המספר המתקבל מהפעלת f על ϕ_k אזי $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.

פונקציה מוכללת f מוגדרת על ידי פעולתה על פונקציות הבוחן. כלומר הפונקציה מוגדרת על ידי תגובתה לכניסות שהן פונקציות בוחן. בהמשך נרחיב את פעולת הפונקציות המוכללות גם לפונקציות שאינן פונקצית בוחן. נובע מכך שכדי לבדוק אם שתי פונקציות מוכללות הן זהות מספיק לבדוק מה תגובתן לכניסה של פונקציות הבוחן.

נשתמש כעת בשני סימונים מוכרים כדי לסמן פעולות דומות על פונקציות מוכללות.

הגדרה 3.3.4 אם f היא פונקציה מוכללת ו-ϕ היא פונקצית בוחן, נסמן את הפעולה של f על ϕ כאינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt.$$

נגדיר פעולות אלגבריות בין פונקציות מוכללות f_1, f_2 כך. הסימון $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ מוגדר דרך הפעולה של f כלומר

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt \doteq \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\phi(t)\,dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\phi(t)\,dt.$$

כפל בפונקצית בוחן ϕ_1 מוגדר על ידי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi_1(t)f(t)\right)\phi(t)\,dt \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\phi_1(t)\phi(t)\right)\,dt.$$

צד ימין מוגדר היטב שכן מכפלת פונקציות בחן היא פונקצית בחן. פעולות שינוי ציר הזמן מוגדרות, ל-α, β ממשיים,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t + \beta)\phi(t)\,dt \doteq \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\phi\left(\frac{s-\beta}{\alpha}\right)\,ds.$$

קל לראות כי אם f, f_1, f_2 הן פונקציות חסומות אזי כל השוויונים לעיל מתקיימים, כאשר האינטגרל הוא במובן הרגיל. חשוב להדגיש כי אינטגרל זה הוא רק סימון לפעולה של פונקציה הבוחן, ומתמטית הוא שונה מאינטגרלים אחרים שאנו מכירים. אך כפי שברור מההגדרות, פעולת פונקצית הבוחן מקיימת תכונות דומות לאינטגרל, ולכן סימון זה הוא נוח. לבסוף, כיוון שלפי ההגדרה פונקציה מוכללת היא לינארית, נובע כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\alpha\phi_1(t) + \beta\phi_2(t)]\,dt = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_1(t)\,dt + \beta\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_2(t)\,dt.$$

לסיכום אנו רואים כי התנהגותה של פונקציה מוכללת מתאימה לכללים הרגילים של פונקציות, תחת סימן האינטגרל. יש לשים לב כי כפל בין פונקציות מוכללות עלול להיות לא מוגדר!

3.3.2 גזירה של פונקציות מוכללות

נוח היה כמובן אם ניתן היה להחיל על פונקציות מוכללות את כל כללי הגזירה והאינטגרציה הרגילים. לצורך כך יש להגדיר נגזרת במובן שונה מנגזרת של פונקציה רגילה, ובפרט במובן שאינו מתאים להגדרה שנתנה בקורס חדו"א. אולם תכונותיה של נגזרת זו דומות לאלה של נגזרת רגילה. בפרט, נרצה כי תחת הגדרה זו, נוסחת האינטגרציה בחלקים תהיה תקפה. אם f היא פונקציה רגילה (לא מוכללת), גזירה ברציפות, אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}f(t)\phi(t)\,dt = f(t)\phi(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d}{dt}\phi(t)\,dt \tag{3.3.5}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d}{dt}\phi(t)\,dt \tag{3.3.6}$$

(בתנאי ש-f אינה גדלה מהר מדי עבור $|t|$ גדול), בגלל הדרישה ש-$\phi(t)$ שואפת לאפס ב- $|t|$ גדול. לכן

הגדרה 3.3.5 נגזרת של פונקציה מוכללת מוגדרת על ידי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} f(t)\phi(t)\, dt \doteq -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{dt}\phi(t)\, dt. \tag{3.3.7}$$

טענה 3.3.6 הנגזרת (3.3.7) מקיימת את התכונות הרגילות: עבור מספר (מרוכב) α ופונקצית בחן ϕ_1,

$$\frac{d}{dt}(f_1 + f_2) = \frac{d}{dt} f_1 + \frac{d}{dt} f_2, \tag{3.3.8}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha f) = \alpha \frac{d}{dt} f \tag{3.3.9}$$

$$\frac{d}{dt}(f \cdot \phi_1) = f \frac{d}{dt}\phi_1 + \phi_1 \frac{d}{dt} f. \tag{3.3.10}$$

הוכחה: השוויון הראשון נובע מההגדרות שכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(f_1(t) + f_2(t))\, \phi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(t) + f_2(t)) \frac{d}{dt}\phi(t)\, dt \tag{3.3.11}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \frac{d}{dt}\phi(t)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \frac{d}{dt}\phi(t)\, dt \tag{3.3.12}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} f_1(t)\phi(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} f_2(t)\phi(t)\, dt. \tag{3.3.13}$$

הוכחת השוויון השני דומה. לבסוף

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(\phi_1(t) f(t))\, \phi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} (\phi_1(t) f(t)) \frac{d}{dt}\phi(t)\, dt \tag{3.3.14}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\phi_1(t) \frac{d}{dt}\phi(t)\right) dt \tag{3.3.15}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{d}{dt}[\phi_1(t)\phi(t)] - \phi(t) \frac{d}{dt}\phi_1(t)\right) dt \tag{3.3.16}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{dt}[\phi_1(t)\phi(t)]\ dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\phi(t) \frac{d}{dt}\phi_1(t)\right) dt \tag{3.3.17}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} f(t)\right) \phi_1(t)\phi(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) \frac{d}{dt}\phi_1(t)\right) \phi(t)\, dt \tag{3.3.18}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi_1(t) \frac{d}{dt} f(t) + f(t) \frac{d}{dt}\phi_1(t)\right) \phi(t)\, dt. \tag{3.3.19}$$

מ.ש.ל.

לסיכום, פעולות הגזירה של פונקציות מוכללות מקיימות את אותם חוקים כמו גזירה רגילה. נגזרת של פונקציה מוכללת היא תמיד פונקציה מוכללת. מצד שני, אם נפעיל את ההגדרות של פונקציה מוכללת על פונקציה רגילה, התוצאה תהיה נכונה בשל ההתאמה בתכונות.

3.3.3 הרחבות

$\mathbb{S}$ משמשת רק כדי לאפיין פונקציות מוכללות. למזלנו ניתן להרחיב את הפעולה של פונקציות מוכללות גם לאינטגרלים עם פונקציות שאינן פונקציות בוחן. זאת יש לעשות בזהירות, לכל פונקציה מוכללת לפי תכונותיה. כך למשל, נשים לב כי פעולת פונקצית הדלתה תלויה רק בערך ב-0. כדי שהפעולה תהיה מוגדרת היטב, יש צורך ברציפות ב-0. לכן הנוסחה

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t)\,dt = g(0)$$

תקפה לכל פונקציה g אשר רציפה ב-0. בצורה דומה ניתן להרחיב את ההגדרה של פונקציות מוכללות אחרות. גם כל תכונות האינטגרל נשמרות עבור משפחה רחבה יותר של פונקציות, אולם כאמור עד כמה ניתן להרחיב---תלוי בתכונות הפונקציה המוכללת.

הערה מתמטית: למעשה, אפשר לתאר פונקציות מוכללות בצורה פשוטה למדי:

משפט 3.3.7 משפט הייצוג. לכל פונקציה מוכללת f קיימים פונקציה רציפה g ושלם N כך ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{d^N\phi(t)}{dt^N}\,dt.$$

עוד על פונקציות מוכללות בפרק על התמרות פוריה, שם נרחיב את הגדרת ההתמרה ונבצע התמרות של פונקצית מוכללות.

3.3.4 פונקצית דלתה ונגזרותיה

נחזור כעת להגדרה מדויקת של פונקצית דלתה של דירק, ונאפיין את התנהגות נגזרותיה.

הגדרה 3.3.8 פונקצית דלתה היא הפונקציה המוכללת המקיימת

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\,dt = \phi(0).$$

קל לבדוק כי אכן זו פעולה לינארית (וכן קל לבדוק את תכונת הרציפות), ולכן זוהי פונקציה מוכללת.

נסמן ב-u את פונקצית המדרגה, כלומר

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

הערך ב-$t = 0$ אינו מוגדר.

טענה 3.3.9

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

הוכחה: עלינו להוכיח כי הפונקציה המוכללת שהיא הנגזרת של פונקצית המדרגה פועלת בדיוק כמו דלתה על כל פונקצית בוחן. אולם לפי הגדרת הנגזרת,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{du(t)}{dt}\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d}{dt}\phi(t)\right]u(t)\,dt \tag{3.3.20}$$

$$= -\int_{0}^{\infty}\frac{d}{dt}\phi(t)\,dt \tag{3.3.21}$$

$$= -\phi(\infty)+\phi(0) = \phi(0). \tag{3.3.22}$$

זוהי בדיוק פעולת פונקצית הדלתה. מ.ש.ל.

קל גם להראות כי פונקצית המדרגה היא אינטגרל (לא מסויים) של דלתה כלומר

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(s)\,ds = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0\end{cases}. \tag{3.3.23}$$

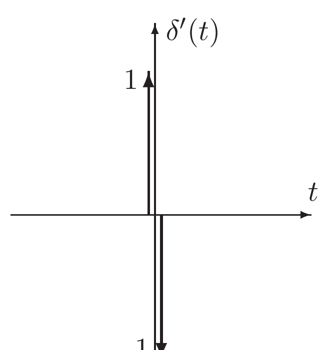
ואכן אינטגרל זה אינו מוגדר בנקודה 0, בהתאם להגדרתנו את המדרגה.

מהי הנגזרת δ' של פונקצית דלתה? לפי הגדרה 3.3.5 הנגזרת מוגדרת דרך פעולתה על פונקציות בחן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\frac{d}{dt}\phi(t)\,dt \tag{3.3.24}$$

$$= -\phi'(0) \tag{3.3.25}$$

כיוון שנגזרת של פונקצית בחן היא פונקצית בחן, ומהגדרת פונקצית דלתה. הנגזרת של פונקצית דלתה נקראת "דובלט" (doublet) ונהוג לשרטטה כך:



איור 3.3: נגזרת של δ': doublet

תכונה זאת ניתן להרחיב לכל פונקציה f שהיא בעלת נגזרת רציפה ב-0: עבור פונקציה כזאת

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)\,dt = -f'(0)\,. \tag{3.3.26}$$

בצורה דומה, אם f היא פונקציה בעלת n נגזרות רציפות ב-0 אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(t)\delta^{(n-1)}(t)\,dt \tag{3.3.27}$$

$$= (-1)^n f^{(n)}(0)\,. \tag{3.3.28}$$

המכפלה של פונקציית דלתה בפונקציה רגילה f מוגדרת בתנאי ש-f רציפה בנקודה 0. תחת תנאי זה

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(t)f(t))\phi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)(f(t)\phi(t))\,dt=f(0)\phi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}(f(0)\delta(t))\phi(t)\,dt \tag{3.3.29}$$

ולכן $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$: שני צידי השוויון הם פונקציות מוכללות, והן שוות.

בצורה דומה נחשב מהו $f(t)\delta'(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)\delta'(t))\phi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)(f(t)\phi(t))\,dt \tag{3.3.30}$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\frac{d}{dt}(f(t)\phi(t))\,dt \tag{3.3.31}$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\frac{d}{dt}\phi(t)\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)\frac{d}{dt}f(t)\,dt \tag{3.3.32}$$

$$=-f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\frac{d}{dt}\phi(t)\,dt-f'(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)\,dt \tag{3.3.33}$$

$$=f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\delta(t)\phi(t)\,dt-f'(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)\,dt \tag{3.3.34}$$

ומכאן $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$.

בצורה דומה ניתן להראות כי

$$f(t)\delta^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)\,. \tag{3.3.35}$$

ואכן צד שמאל של השוויון יתן

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n)}(t)\phi(t)\,dt=(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}\left(f(t)\phi(t)\right)\Big|_{t=0} \tag{3.3.36}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\phi^{(n-k)}(0) \tag{3.3.37}$$

ומצד שני צד ימין של השוויון שעלינו להוכיח:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(t)\right)\phi(t)\,dt \tag{3.3.38}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n-k)}(t)\phi(t)\,dt\right) \tag{3.3.39}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\phi^{(n-k)}(0) \tag{3.3.40}$$

והביטויים אמנם שווים.

דוגמה 3.3.10 נחשב את הביטוי $\sin(t)\delta^{(n)}(t)$ עבור $n \leq 3$.

$$\sin(t)\delta(t) = \sin(0)\delta(t) = 0 \tag{3.3.41}$$

$$\sin(t)\delta'(t) = \sin(0)\delta'(t) - \cos(0)\delta(t) \tag{3.3.42}$$

$$= -\delta(t) \tag{3.3.43}$$

$$\sin(t)\delta^{(2)}(t) = \sin(0)\delta^{(2)}(t) - \sin^{(1)}(0)\delta^{(1)}(t) + \sin^{(2)}(0)\delta(t) \tag{3.3.44}$$

$$= 0 - \cos(0)\delta^{(1)}(t) - \sin(0)\delta(t) \tag{3.3.45}$$

$$= -\delta'(t) \tag{3.3.46}$$

$$\sin(t)\delta^{(3)}(t) = \sin(0)\delta^{(3)}(t) - 3\sin^{(1)}(0)\delta^{(2)}(t) + 3\sin^{(2)}(0)\delta^{(1)}(t) - \sin^{(3)}(0)\delta(t) \tag{3.3.47}$$

$$= 0 - 3\cos(0)\delta^{(2)}(t) - 3\sin(0)\delta^{(1)}(t) + \cos(0)\delta(t) \tag{3.3.48}$$

$$= -\delta^{(2)}(t) + \delta(t)\,. \tag{3.3.49}$$

3.4 מערכות גרעין

כפי שנראה בהמשך, כל מערכת כניסה יציאה בזמן רציף שהיא לינארית ניתנת לתאור (במגבלות טכניות קלות עליהן לא נעמוד כאן) כמערכת אינטגרלית, מהצורה הבאה

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)x(s)\,ds\,. \tag{3.4.1}$$

הפונקציה K, שהיא פונקציה ממשית (או מרוכבת) של שני משתנים ממשיים, נקראת גרעין המערכת. היא יכולה להיות פונקציה מוכללת. נעסוק במערכת SISO בלבד, למרות שניתן להרחיב בקלות את התוצאות למערכת MIMO.

משפט 3.4.1 כל מערכת המתוארת על ידי (3.4.1) מתארת מערכת מיפוי כניסה-יציאה לינארית.

הוכחה: המערכת היא מיפוי כניסה יציאה כיוון שלכל אות כניסה מתאים אות יציאה, המוגדר דרך המש- וואה (3.4.1). נבחר כעת קבועים ואותות α, β, x_1, x_2. אזי

$$y(t) = \Phi[\alpha x_1 + \beta x_2](t) \tag{3.4.2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))\,dt \tag{3.4.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\alpha x_1(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\beta x_2(t)\,dt \tag{3.4.4}$$

$$= \alpha\Phi[x_1](t) + \beta\Phi[x_2](t) \tag{3.4.5}$$

כאשר השוויון השלישי נובע מתכונות האנטגרל. מ.ש.ל.

כדי להראות שזהו ייצוג כללי המתאר (כמעט) כל מערכת, נבחר מערכת כניסה יציאה לינארית כלשהי המוגדרת על ידי מפוי Φ. נגדיר פונקציה K על ידי

$$K(t,\tau) \doteq \Phi[\delta(\cdot - \tau)](t) = \Phi[\sigma^{-\tau}\delta](t)\,. \tag{3.4.6}$$

זוהי תגובת המערכת ברגע t לכניסת הלם אשר פעל בזמן τ. נייצג את הכניסה על ידי אינטגרל עם פונקצית דלתה (ראה פרק 3.6)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau \,. \tag{3.4.7}$$

כיוון שהמערכת היא לינארית, לכל אוסף קבועים $\{x_i\}$ ופונקציות $\{f_i(\tau)\}$ מתקיים

$$\Phi\left[\sum_i x_i f_i\right](t) = \sum_i x_i \Phi[f_i](t)\,. \tag{3.4.8}$$

כיוון שאינטגרל הוא סוג של סכום (נזכר באינטרגל רימן), נקבל בצורה דומה

$$\begin{aligned} y(t) &= \Phi[x](t) && (3.4.9)\\ &= \Phi\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\cdot-\tau)\, d\tau\right](t) && (3.4.10)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\Phi[\delta(\cdot-\tau)](t)\, d\tau && (3.4.11)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)K(t,\tau)\, d\tau \,. && (3.4.12)\end{aligned}$$

קיבלנו ייצוג של המערכת כמערכת גרעין.

הערה מתמטית: הסיבה שחישוב זה אינו "משפט" ומובא בהסתייגות היא כפולה. ראשית, תכונת הלינאריות מוגדרת לסכומים עם מספר מחוברים סופי, ולא לאינטגרלים. שנית, לא הגדרנו מה זאת פונקציה מוכללת של שני משתנים. ואכן, ישנן מערכות לינאריות אשר לא ניתן לייצגן כמערכות גרעין, אולם הן "מערכות פתולוגיות."

פרט למיקרי קצה, מערכת גרעין היא מערכת דינמית לינארית עם זכרון.

תרגיל 3.4.2 הראה כי המערכת עם גרעין $K(t,s) = k(t)\delta(t-s)$ אינה בעלת זיכרון.

משפט 3.4.3 מערכת עם גרעין K היא סיבתית אם ורק אם לכל t

$$\int_{t^+}^{\infty} |K(t,s)|\, ds = 0\,. \tag{3.4.13}$$

משמעות התנאי היא כי $K(t,s) = 0$ לכל $s > t$, פרט אולי למספר זניח של זמנים.

הוכחה: אם התנאי מתקיים אזי

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)x(s)\, ds = \int_{-\infty}^{t^+} K(t,s)x(s)\, ds \tag{3.4.14}$$

ולכן התלות בערכי $x(s)$ היא עבור $s \le t$ בלבד. מצד שני אם התנאי אינו מתקיים אזי קיימים $T < t$ ואינטרוול אשר נסמן ב-$[T,S]$ שבו מתקיים

$$\int_{T}^{S} K(t,s)\, ds = \alpha \neq 0\,. \tag{3.4.15}$$

נבחר אות כניסה

$$x(s) = \begin{cases} \alpha & T \le s \le S \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{3.4.16}$$

ערך התגובה ברגע t הוא

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)x(s)\,ds = \int_{T}^{S} K(t,s)\alpha\,ds = \alpha^2\,. \tag{3.4.17}$$

התגובה תלויה בערכי הכניסה בעתיד, ולכן המערכת אינה סיבתית. מ.ש.ל.

יש מערכות גרעין שהן הפיכות, אך לא כולן. למשל הגרעין $K(t,s)=1$ נותן אותה תגובה לכל האותות אשר יש להם אותו אינטגרל, ולכן אינה הפיכה.

ברור אינטאיטיבית כי מערכת גרעין אינה קבועה בזמן, בשל התלות המפורשת בזמן t. בסעיף הבא נראה מתי מערכת גרעין היא קבועה בזמן.

3.5 מערכות קונוולוציה

מערכת קונוולוציה מוגדרת על ידי

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)\,ds\,. \tag{3.5.1}$$

זהו כמובן מקרה פרטי של מערכת גרעין, ולכן זוהי מערכת כניסה יציאה לינארית. ממשפט 3.4.3 נובע כי תנאי מספיק והכרחי לסיבתיות הוא ש-$h(t)=0$ לכל $t<0$ (ראה הבהרה במשפט). נשים לב כי בהתאם לתנאי, מתקבל כי מערכת עבורה $h=\delta$ היא סיבתית: ואכן במקרה זה $y=h*x=x$ והמערכת אכן סיבתית.

משפט 3.5.1 כל מערכת המתוארת על ידי (3.5.1) מתארת מערכת מיפוי כניסה-יציאה לינארית קבועה בזמן.

הוכחה: יש צורך רק להוכיח קביעות בזמן. נבדוק לפי ההגדרה

$$\sigma^\tau y(t) = \sigma^\tau\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)\,ds\right] \tag{3.5.2}$$

$$= \sigma^\tau\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(s)x(t-s)\,ds\right] \tag{3.5.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\sigma^\tau x(t-s)\,ds \tag{3.5.4}$$

$$= \Phi[\sigma^\tau x](t) \tag{3.5.5}$$

כאשר השוויון השני נובע מתכונות הקונוולוציה (ראה פרק 3.6) והשלישי מההגדרה של σ. מ.ש.ל.

מצד שני, מערכת גרעין קבועה בזמן היא בהכרח מערכת קונוולוציה:

משפט 3.5.2 יהי K גרעין של מערכת קבועה בזמן. נגדיר $h(t) \doteq K(t,0)$. אזי לכל x,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)x(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)\,ds\,. \tag{3.5.6}$$

הוכחה: מההגדרה,

$$\Phi\left[\sigma^{-\tau}\delta\right](t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\delta(s-\tau)\,ds = K(t,\tau)\,. \tag{3.5.7}$$

מהקביעות בזמן נובע כי

$$\Phi\left[\sigma^{-\tau}\delta\right](t) = \sigma^{-\tau}\Phi\left[\delta\right](t) \tag{3.5.8}$$
$$= \sigma^{-\tau}\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\delta(s)\,ds \tag{3.5.9}$$
$$= \sigma^{-\tau}K(t,0) \tag{3.5.10}$$
$$= K(t-\tau,0)\,. \tag{3.5.11}$$

משתי המשוואות נובע כי $K(t,\tau) = K(t-\tau,0)$ והמשפט הוכח. מ.ש.ל.

לא כל מערכת קונוולוציה היא הפיכה: נוח יהיה לנתח נושא זה בעזרת התמרות, ולכן נדחה את הדיון.
כיוון שמערכות קונוולוציה הן חשובות לנו, נקדיש זמן לחזרה והעמקה של פעולת הקונוולוציה ותכונותיה.

3.6 קונוולוציה.

הגדרה 3.6.1 פעולת קונוולוציה בין שתי פונקציות מוגדרת כך

$$(f*g)(t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

לפעולת הקונוולוציה התכונות הבאות.

קומוטטיביות (סדר המשתנים אינו חשוב), כלומר

$$f*g = g*f\,. \tag{3.6.1}$$

הוכחה: נרשום את ההגדרה. בעזרת החלפת משתנים $\tau' = t-\tau$

$$(f*g)(t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \tag{3.6.2}$$
$$= \int_{\infty}^{-\infty} f(t-\tau')g(\tau')\,d(-\tau') \tag{3.6.3}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau')g(\tau')\,d\tau' \tag{3.6.4}$$
$$\doteq (g*f)(t)\,. \tag{3.6.5}$$

אסוציאטיביות (כלומר מיקום הסוגריים בשרשרת קונוולוציות):

$$(f * g) * h = f * (g * h)\,. \tag{3.6.6}$$

ההוכחה היא תרגיל בהחלפת משתנים:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{3.6.7}$$

$$((f * g) * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau-s)g(\tau)h(s)\,d\tau\,ds \tag{3.6.8}$$

$$(g * h)(\tau') = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau'-s)h(s)\,ds \tag{3.6.9}$$

$$(f * (g * h))(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau'-s)h(s)f(t-\tau')\,d\tau'\,ds\,. \tag{3.6.10}$$

התוצאה מתקבלת כעת מהחלפת משתנים $\tau' = \tau+s$ והשוואת הביטויים (נשים לב כי בהחלפה זו $d\tau' = d\tau$).

קונוולוציה היא פעולה לינארית: מתכונות האינטגרל נובע מיד כי

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h\,. \tag{3.6.11}$$

ברור כי ניתן להפעיל הגדרה זו גם לפונקציות מוכללות, שכן ניתן לחשוב על $g(t-\tau)$ עבור כל t כעל פונקציה של המשתנה τ בלבד. אם $g(t)$ רציפה בנקודה t אזי ניתן להגדיר ולקבל

$$(\delta * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = g(t).$$

הראינו אם כך כי $(\delta * g)(t) = g(t)$ לכל פונקציה g בכל נקודת רציפות. זהות זו נכונה גם כאשר g היא פונקציה מוכללת, כאשר השוויון הוא במובן של שוויון בין פונקציות מוכללות. לכן לא נתחשב בנקודות אי הרציפות אלא נאמר כי $\delta * g = g$. כדי להצדיק זאת נבדוק מה קורה באינטגרל מול פונקצית בוחן ϕ. על ידי החלפת המשתנה t במשתנה s כאשר $s = t-\tau$ ושימוש בתכונות פונקצית דלתה

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\delta * g)(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)g(t-\tau)\phi(t)\,d\tau\,dt \tag{3.6.12}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)g(s)\phi(s+\tau)\,d\tau\,ds \tag{3.6.13}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\phi(s)\,ds \tag{3.6.14}$$

ואכן קבלנו כי $\delta * g = g$.

תכונות נוספות של הקונוולוציה: הזזה

$$(f * \sigma^{-\tau}\delta)(t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\delta(s-\tau)\,ds \tag{3.6.15}$$

$$= f(t-\tau) \tag{3.6.16}$$

בהתאם לתכונות פונקצית דלתה והגדרת הזזה בזמן של פונקציה מוכללת. המשמעות היא שניתן לבטא הזזה בעזרת קונוולוציה: $\sigma^{-\tau} f = f * \sigma^{-\tau}\delta$.

ניתן לייצג גזירה בעזרת קונוולוציה, בצורה הבאה:

$$f'(t) = (f * \delta')(t)\,. \tag{3.6.17}$$

הוכחה:

$$(f * \delta')(t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta'(\tau)\,d\tau \tag{3.6.18}$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\tau} f(t-\tau)\delta(\tau)\,d\tau \tag{3.6.19}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} f(t-\tau)\delta(\tau)\,d\tau \tag{3.6.20}$$
$$= f'(t)\,. \tag{3.6.21}$$

קבלנו את הייצוג $f'(t) = Df(t) = (f * \delta')(t)$. באופן כללי יותר

$$f^{(n)}(t) = D^n f(t) = (f * \delta^{(n)})(t)\,. \tag{3.6.22}$$

הייצוג של הזזת זמן וגזירה דרך קונוולוציה עם הזזת דלתה ונגזרת של דלתה נותן את התוצאה החשובה הבאה.

משפט 3.6.2 פעולת הקונוולוציה מתחלפת עם גזירה ועם הזזה בזמן, כלומר

$$(\sigma^\theta f) * g = \sigma^\theta (f * g) = f * \sigma^\theta g\,, \tag{3.6.23}$$
$$(Df) * g = D(f * g) = f * (Dg)\,. \tag{3.6.24}$$

לבסוף, גזירה מתחלפת עם הזזה בזמן, כלומר

$$D(\sigma^\theta f) = \sigma^\theta (Df)\,. \tag{3.6.25}$$

הוכחה: מהייצוגים שהראינו והאסוציאטיביות של הקונוולוציה,

$$(\sigma^\theta f) * g = ((\sigma^\theta \delta) * f) * g \tag{3.6.26}$$
$$= (\sigma^\theta \delta) * (f * g) \tag{3.6.27}$$
$$= f * ((\sigma^\theta \delta) * g)\,. \tag{3.6.28}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בקומוטטיביות. לכן מהיצוג של הזזה על ידי קונוולוציה עם דלתה נובע כי הזזה בזמן מתחלפת עם קונוולוציה. בצורה דומה עבור גזירה

$$(Df) * g = ((D\delta) * f) * g \tag{3.6.29}$$
$$= (D\delta) * (f * g) \tag{3.6.30}$$
$$= f * (D\delta) * g\,. \tag{3.6.31}$$

האיבר השני והאחרון שווים לביטויים במשפט. בנוסף

$$D(\sigma^\theta f) = (D\delta) * ((\sigma^\theta \delta) * f) = (\sigma^\theta \delta) * ((D\delta) * f) = \sigma^\theta (Df) \; . \qquad (3.6.32)$$

מ.ש.ל.

כדי לחשב קונוולוציות בצורה ישירה חשוב לעיתים לדעת עבור אלו זמנים התוצאה מתאפסת.

משפט 3.6.3 נניח ש-f, g הן שני אותות המתאפסים מחוץ לאינטרוולים, כלומר

$$f(t) = 0 \; for \; t \notin [a, b], \qquad (3.6.33)$$

$$g(t) = 0 \; for \; t \notin [c, d] \; . \qquad (3.6.34)$$

אזי

$$(f * g)(t) = 0 \; for \; t \notin [a + c, b + d] \; . \qquad (3.6.35)$$

הוכחה: נחשב

$$(f * g)(t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(t - s) \, ds \; . \qquad (3.6.36)$$

אם $t < a + c$ נבדוק מה קורה בכל תחום של s. אם $s < a$ אזי $f(s) = 0$ ולכן אין תרומה לאינטגרל. מצד שני אם $s > a$ אזי $t - s < a + c - a < c$ ואז $g(t - s) = 0$ ושוב אין תרומה לאינטגרל. ההוכחה לגבי הגבול העליון זהה. מ.ש.ל.

3.6.1 מד"ר ומערכות קונוולוציה

ראינו כי מד"ר במנוחה התחלתית היא מערכת לינארית וקבועה בזמן. לכן ניתן להציג אותה כמערכת קונוולוציה. את תגובת ההלם ניתן לחשב במספר שיטות: על ידי איזון הלמים, או על ידי חישוב הפתרון ההומוגני. שיטות אלו יועברו בתרגיל.

3.7 תגובת מערכת קונוולוציה לאות אקספוננציאלי

אות אקספוננציאלי הוא "אות עצמי" של מערכות לינאריות קבועות בזמן (לק"ב). כלומר, אם הכניסה למערכת לק"ב היא אות מהצורה $x(t) = e^{st}$ (כאשר s הוא מספר מרוכב), אזי התגובה גם היא אות מאותה

צורה, כלומר התגובה תהיה $H(s)e^{st}$ עבור קבוע מרוכב $H(s)$. ואכן

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \tag{3.7.1}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)\,d\tau \tag{3.7.2}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{st}e^{-s\tau}h(\tau)\,d\tau \tag{3.7.3}$$
$$= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}h(\tau)\,d\tau \tag{3.7.4}$$
$$= e^{st}H(s). \tag{3.7.5}$$

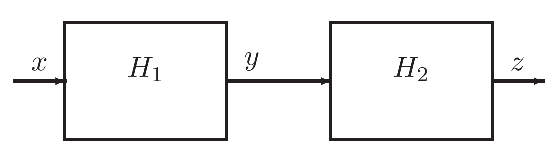
ושוב הגענו לתוצאה כי התגובה היא קבוע (כלומר גודל שאינו תלוי בזמן) כפול אות הכניסה. קבוע זה תלוי בפרמטר s, ומהחישוב למעלה

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}h(\tau)\,d\tau\ . \tag{3.7.6}$$

גודל זה נקרא פונקצית התמסורת של המערכת, ונלמד עליה בפירוט בפרק 6.

3.8 חיבור מערכות

נחזור כעת לדון בחיבור מערכות. נניח תחילה שאנו מחברים בטור שתי מערכות גרעין:



איור 3.4: חיבור מערכות בטור

כיוון שמדובר במערכות גרעין נוכל לבטא זאת בנוסחאות בצורה הבאה.

$$y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(s,u)x(u)\,du \tag{3.8.1}$$
$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_2(t,s)y(s)\,ds \tag{3.8.2}$$

ולכן

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(K_2(t,s)\left[K_1(s,u)x(u)\right]\right)\,du\,ds \tag{3.8.3}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} K_1(t,s)K_2(s,u)\,ds\right)x(u)\,du \tag{3.8.4}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t,u)x(u)\,du \tag{3.8.5}$$

כאשר הגרעין של המערכת הכוללת נתון על ידי

$$K(t,u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(t,s)K_2(s,u)\,ds\,. \tag{3.8.6}$$

עבור מערכות קונוולוציה נקבל

$$z(t) = (x * h_1 * h_2)(t) \tag{3.8.7}$$

$$= (x * (h_1 * h_2))(t) \tag{3.8.8}$$

ומכאן, או ישירות דרך התוצאות למערכות גרעין,

$$z(t) = (h * x)(t) \tag{3.8.9}$$

$$h = h_1 * h_2\,. \tag{3.8.10}$$

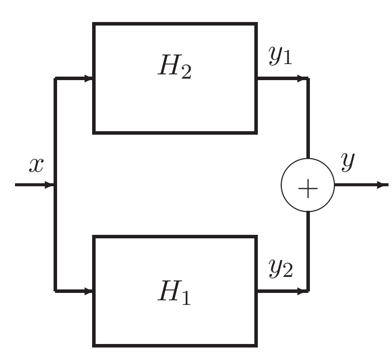
מכאן ומתכונות הקונוולוציה---משפט 3.6.2 ניתן להסיק את התוצאה החשובה הבאה.

משפט 3.8.1 במערכת לינארית קבועה בזמן (אשר ניתן לתאר בעזרת קונוולוציה) התגובה לנגזרת הכניסה היא נגזרת התגובה לכניסה, כלומר

$$\Phi[Dx] = D\Phi[x]\,. \tag{3.8.11}$$

באופן כללי יותר, בהנתן מערכת כזו, מערכת שמהותה גזירה מסדר כלשהו ומערכת שמהותה השהיה, סדר חיבור שלוש המערכות בטור אינו משנה את הקשר בין כניסה ותגובה.

חיבור במקביל של שתי מערכות הוא פשוט יותר. עבור החיבור הקשר בין כניסה ליציאה במערכת גרעין



איור 3.5: חיבור מערכות במקביל

מתואר על ידי

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{3.8.12}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_1(t,s)x(s)\,ds + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(t,s)x(s)\,ds \tag{3.8.13}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(K_1(t,s) + K_2(t,s)\right) x(s)\,ds \tag{3.8.14}$$

ולכן

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)x(s)\,ds \tag{3.8.15}$$

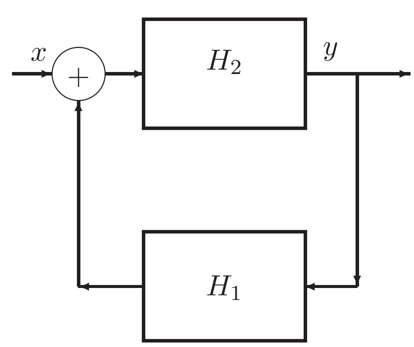
$$K(t,s) = K_1(t,s) + K_2(t,s)\,. \tag{3.8.16}$$

עבור מערכת קונוולוציה נקבל

$$y(t) = (h * x)(t) \tag{3.8.17}$$

$$h = h_1 + h_2\,. \tag{3.8.18}$$

אם כך, נראה שתיאור מערכות על ידי גרעין נותן תשובה לחיבור מערכות. ברור שניתן לנתח בצורה דומה (ופשוטה!) גם חיבורים מורכבים יותר. אולם אחד החיבורים הבסיסיים בתורת המערכות הוא חיבור משוב:



איור 3.6: חיבור משוב

נסיון לנתח מערכת כזאת המורכבת משתי מערכות קונוולוציה, תוך שימוש באותן שיטות כמו עבור חיבור בטור או במקביל, מוביל לנוסחה

$$y = (x + y * h_1) * h_2 \tag{3.8.19}$$

שהיא נוסחה סתומה, אשר לא ברור כיצד ניתן לחלץ ממנה את y ולתאר את התלות שלו ב- x. בהמשך נראה כי בעזרת שיטות התמרה קל לנתח מערכת כזו.

פרק 4

יציבות

חזרה לקראת שעור זה: מושגים מאלגברה: מרחב לינארי, נורמה, מכפלה פנימית. ממד"ר: תנאים להתכנסות ולהתבדרות הפתרון ההומוגני.

נושא היציבות הוא מרכזי לתורת המערכות, ובעל חשיבות רבה בכל צדדיו כולל עיבוד אותות. באופן אינטואיטיבי, מערכת יציבה היא כזו אשר כניסה או עירור אחר קטן מובילים לתגובה קטנה. כדי להגדיר מהו אות קטן, עלינו להגדיר מרחבי אותות ומדד לגודל של אות.

4.1 מרחבי אותות

מרחב נורמה Normed Space הוא מרחב לינארי אשר מוגדרת עבורו נורמה.

הגדרה 4.1.1 אוסף אותות נקרא מרחב לינארי אם לכל שני אותות x, y וקבועים a, b האות $ax + by$ שייך לאוסף.
איבר האפס באוסף יסומן ב-0; זהו האיבר המקיים $x + 0 = x$ לכל x באוסף.
נורמה $||x||$ היא פונקציה המקיימת את התכונות הבאות:

1. $0 \geq ||x||$ ושיוויון מתקיים אם ורק אם $x = 0$.
2. אי שוויון המשולש: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,
3. לכל מספר מרוכב α מתקיים השיויון $||\alpha x| = |\alpha| \cdot ||x||$.

תכונות אלו מאפשרות להתייחס לגודל $||x - y||$ כאל המרחק בין x ו-y.
הערה מתמטית: ניתן להגדיר מרחב לינארי כאשר ה"קבועים" הם אברי שדה כלשהו. אנו נשתמש בדרך כלל במספרים מרוכבים, ולעיתים נגביל לקבועים שהם מספרים ממשיים בלבד.
הגדלים הבאים הם נורמות (לא נוכיח זאת כאן):

הגדרה 4.1.2 עבור פונקציות (ממשיות או מרוכבות) ועבור כל $p \geq 1$ נגדיר נורמת L_p כך:

$$||x||_p \doteq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.1.1}$$

ואם x רציפה למקוטעין נגדיר

$$||x||_\infty \doteq \sup_t \{|x(t)|\}\,. \tag{4.1.2}$$

המרחב (אוסף הפונקציות) L_p מוגדר כאוסף הפונקציות עבורן הנורמה המתאימה סופית, כלומר

$$L_p = \{x : ||x||_p < \infty\}\,. \tag{4.1.3}$$

ניתן להרחיב את ההגדרה של $||x||_\infty$ גם לפונקציה כללית יותר, למשל על ידי כך שנקרב אותה בעזרת פונקציות רציפות למקוטעין.

הערה מתמטית: הגדרה שלמה יותר של $||x||_\infty$ היא הבאה. $||x||_\infty$ הוא המספר הקטן ביותר עבורו קיים אוסף זמנים A כך שמתקיימות שתי התכונות הבאות:

$$|x(t)| \le ||x||_\infty \qquad t \notin A \text{ עבור כל }$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{t\in A\}}\, dt = 0\,.$$

(האנטגרל הוא אנטגרל לבג). כלומר זהו אכן המקסימום של x, למעט קבוצה "קטנה" של זמנים. נשים לב כי לפי הגדרה זו, אם נשנה את הערך של x בנקודה בודדת, הנורמה לא תשתנה.

לכל $p \ge 1$ המרחב L_p הוא מרחב לינארי עם נורמה. בפרט, המרחב L_∞ הוא אוסף האותות החסומים, L_1 הוא אוסף האותות (פונקציות) האינטגרביליים בהחלט. המרחב L_2 הוא אוסף הפונקציות בעלות אנרגיה סופית, ועבורו (ורק עבור $p = 2$!) ניתן להגדיר מכפלה פנימית

$$\langle x, y\rangle \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt \tag{4.1.4}$$

כאשר y^* הוא הצמוד המרוכב של y. הנורמה קשורה למכפלה הפנימית דרך $\langle x, x\rangle = ||x||_2^2$.

4.2 יציבות כניסה חסומה-יציאה חסומה

עבור מערכות מיפוי כניסה יציאה, חשוב לדעת אם יתכן שכניסה חסומה תביא ליציאה שאינה חסומה.

הגדרה 4.2.1 מערכת מיפוי כניסה יציאה Φ נקראת יציבה במובן *BIBO: bounded input bounded output* אם תגובת המערכת לכניסה חסומה היא תמיד חסומה, כלומר אם $||x||_\infty < \infty$ גורר $||\Phi(x)||_\infty < \infty$.

לפני שנכיר כלים לבדיקת יציבות, כמה דוגמאות.

דוגמה 4.2.2 מההגדרה קל לראות כי המערכות הבאות הן יציבות *BIBO*:

$$\Phi_1(x)(t) = \cos(x(t)) \tag{4.2.1}$$

$$\Phi_2(x)(t) = x(t-1)\cdot x(t+3). \tag{4.2.2}$$

לעומת זאת המערכות הבאות אינן יציבות במובן $BIBO$:

$$\Phi_3(x)(t) = \begin{cases} 1 & x(t) = 0 \\ \frac{1}{x(t)} & x(t) \neq 0\,. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

$$\Phi_4(x)(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)\,ds \tag{4.2.4}$$

$$\Phi_5(x)(t) = \frac{d}{dt}x(t). \tag{4.2.5}$$

כדי לראות שאכן מערכות אילו אינן יציבות, נכניס ל-Φ_3 אות

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & t > 1. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

ול-Φ_4 נכניס את האות החסום $x(t) \equiv 1$. לבסוף ל-Φ_5 נכניס את האות $x(t) = \sin(t^2)$ שהוא אות חסום, אך נגזרתו $2t \cdot \cos(t^2)$ אינה חסומה.

למערכות קונוולוציה יש שיטה לבדיקת היציבות.

משפט 4.2.3 Φ מערכת קונוולוציה עם תגובת הלם h, שהיא אות לא מוכלל, היא מערכת יציבה $BIBO$ אם ורק אם

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty\,. \tag{4.2.7}$$

כלומר אם ורק אם h נמצאת ב-L_1. אם התנאי מתקיים אזי $||\Phi[x]||_\infty \leq ||h||_1 \cdot ||x||_\infty$.

הוכחה: נניח תחילה כי h שייכת ל-L_1. יהי x אות חסום כלשהו. עלינו להראות כי התגובה אליו חסומה. ואכן

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \right| && (4.2.8) \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|\;d\tau && (4.2.9) \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \sup_s |x(s)|\,d\tau && (4.2.10) \\ &= ||h||_1 \cdot ||x||_\infty\,. && (4.2.11) \end{aligned}$$

לכן $||y||_\infty \leq ||h||_1 \cdot ||x||_\infty$ והתנאי מתקיים וכן מתקיים אי השוויון האחרון שבטענה.

כדי להוכיח את הכיוון השני נניח שהתנאי אינו מתקיים, כלומר

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \infty \tag{4.2.12}$$

ונרצה למצוא אות חסום x כך ש-$||\Phi(x)||_\infty = \infty$. נגדיר

$$x(t) = \mathrm{sign}(h(-t)) = \begin{cases} 1 & h(-t) \geq 0 \\ -1 & h(-t) < 0\,. \end{cases} \tag{4.2.13}$$

בסימון אחר, $x(t) = \text{sign}(h(-t))$. נראה כי $y(0) = \infty$ ולכן y אינו אות חסום. נחשב

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(-t)x(t)\,dt \tag{4.2.14}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h(-t)|\,dt \tag{4.2.15}$$

$$= \infty\,. \tag{4.2.16}$$

מ.ש.ל.

למעשה קבלנו תוצאה חזקה יותר מההגדרה: עבור מערכת קונוולוציה, יציבות BIBO שקולה לתנאי כי קיים קבוע B עבורו

$$||y||_\infty \le B \cdot ||x||_\infty \tag{4.2.17}$$

והקבוע B נתון על ידי $B = ||h||_1$. בפרט מכאן נובע כי אם x הוא אות קטן (במובן ש-$||x||_\infty$ הוא קטן), אזי התגובה של המערכת קטנה.

יש מערכות יציבות BIBO אשר אין עבורן קבוע כזה: למשל המערכת המתוארת במשוואה (4.2.1). עבור מערכת זו, אם x קטן אזי $||\Phi[x]||_\infty \approx 1$ כיוון ש-$1 = \cos(0)$. מאותו חישוב, התגובה לאות קטן איננה קטנה.

לעומת זאת, עבור המערכת (4.2.2), לא קיים קבוע B כאמור אך התגובה לאות קטן היא קטנה. כדי לראות זאת, נבחר כניסה חסומה $x(t) = \alpha$. אזי $y(t) = \alpha^2 = ||x||_\infty^2$ ולכן אין קבוע כזה. לעומת זאת מתקיים

$$\sup_t |\Phi[x](t)| \le \sup_t |x(t)|^2 \tag{4.2.18}$$

כלומר $||\Phi[x]||_\infty \le (||x||_\infty)^2$, ולכן התגובה לאות קטן היא קטנה.

תרגיל 4.2.4 האם מערכת הקונוולוציה עם תגובת הלם $h = \delta$ יציבה *BIBO*? האם היא מקיימת את התנאי מהמשפט? האם מערכת הקונוולוציה עם תגובת הלם $h = \delta'$ יציבה *BIBO*?

ניתן להרחיב חלק מתוצאה זו למערכות גרעין.

משפט 4.2.5 מערכת גרעין היא יציבה אם

$$\sup_t \int_{-\infty}^{\infty} |K(t,s)|\,ds < \infty\,. \tag{4.2.19}$$

הוכחה: אם התנאי מתקיים אזי

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |K(t,s)| \sup_s |x(s)|\,ds\,. \tag{4.2.20}$$

מ.ש.ל.

תכונת היציבות נשמרת כאשר מחברים מערכות בצורות מסויימות. מההגדרה קל לראות כי אם Φ_1, Φ_2 הם שתי מערכות IOM יציבות BIBO אזי המערכת המתקבלת מחיבורן בטור והמערכת המתקבלת מחיבורן במקביל גם הן יציבות BIBO. לעומת זאת, המערכת ההופכית (אם יש כזו) אינה בהכרח יציבה.

4.3 יציבות אסימפטוטית

נזכר כי מערכת מד"ר מתוארת דרך משוואה (2.1.1)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{4.3.1}$$

עבור מערכות המתוארות על ידי מד"ר, ניתן לשאול שאלה שונה לגבי יציבות, והיא: האם השפעת תנאי ההתחלה תמיד דועכת?

הגדרה 4.3.1 מערכת מד"ר נקראת יציבה אסימפטוטית אם התגובה בכניסה אפס y_{ZIR} מקיימת

$$y_{ZIR}(t) \to 0 \tag{4.3.2}$$

כאשר $t \to \infty$, וזאת לכל תנאי התחלה.

ברור מההגדרה כי לכניסה אין כל השפעה על תכונה זו או על בדיקתה. נזכר כי הפולינום האפייני של המשוואה ההומוגנית הוא

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n \tag{4.3.3}$$

ושורשי הפולינום האפייני הם הפתרונות של המשוואה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n = 0\,. \tag{4.3.4}$$

משפט 4.3.2 מערכת מד"ר היא יציבה אסימפטוטית אם ורק אם כל שורשי הפולינום האפייני הם בעלי חלק ממשי שלילי ממש, כלומר מקיימים

$$\Re e\,(\lambda) < 0\,. \tag{4.3.5}$$

הוכחה: נזכר (משפט 2.1.8) כי הפתרון ההומוגני, ובפרט y_{ZIR} מורכבים מסכום של איברים מהצורה $t^k e^{\lambda_i t}$ כאשר λ_i הוא שורש של הפולינום האפייני. כל אחד מהאברים הללו מקיים $t^k e^{\lambda_i t} \to 0$ כאשר $t \to \infty$ אם ורק אם $\Re e\,(\lambda_i) < 0$. מ.ש.ל.

חשוב להבין כי שני סוגי היציבות הם שונים לא רק בהגדרה אלא גם בשאלה מתי הם מתקיימים. נראה זאת דרך מספר דוגמאות.

דוגמה 4.3.3 המערכת המתוארת על ידי

$$\dot{y} - y = \dot{x} - x \tag{4.3.6}$$

אינה יציבה אסימפטוטית שכן למשוואה האפיינית יש שורש ב-1. אולם תגובת ההלם היא δ ולכן היציאה שווה לכניסה, והמערכת יציבה $BIBO$.

מצד שני, למערכת

$$\dot{y} + y = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \tag{4.3.7}$$

יש רק שורש אחד של המשוואה האפיינית והוא (-1), ולכן המערכת יציבה אסימפטוטית. אולם קל לראות כי המערכת אינה יציבה $BIBO$ (מהי תגובת ההלם?).

על השאלה הכללית מתי מערכת מד"ר יציבה BIBO ומהם הקשרים בין יציבות אסימפטוטית ליציבות BIBO נענה בפרק מאוחר יותר, כאשר נטפל בהתמרות לפלס. בהקשר זה נראה גם כיצד לנתח יציבות BIBO ללא חישוב תגובת ההלם. התשובות טמונות בניתוח פונקצית התמסורת.

כדי לבדוק יציבות אסימפטוטית של מד"ר עלינו לבדוק תנאי על שרשי הפולינום האפייני. גם כאן לכאורה המצב בעייתי, שכן אין לנו יכולת לחשב שרשים של פולינומים מחזקה גבוהה מ-4. למזלינו כדי לבדוק יציבות אין צורך לדעת במדויק מהם השרשים: די לדעת אם חלקם הממשי שלילי. לצורך בדיקה זו ישנן מספר שיטות. אחת מהן, קריטריון רות'-הורביץ Routh-Hurwitz תועבר בתרגול.

פרק 5

התמרת פוריה

5.1 מבוא: מדוע אותות אקספוננציאליים?

אות אקספוננציאלי הוא "אות עצמי" של מערכות לינאריות קבועות בזמן (לק"ב). כלומר, אם הכניסה למערכת לק"ב היא אות מהצורה $x(t) = e^{st}$ (כאשר s הוא מספר מרוכב), אזי התגובה גם היא אות מאותה צורה, כלומר התגובה תהיה $H(s)e^{st}$ עבור קבוע מרוכב $H(s)$. קל לבדוק עובדה זו עבור פתרון פרטי של מד"ר. ננחש שעבור כניסה $x(t) = e^{st}$ יש פתרון פרטי מהצורה $y_p(t) = H(s)e^{st}$. נציב במשוואה ונבדוק.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{5.1.1}$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n H(s)e^{st}}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m e^{st}}{dt^m} \tag{5.1.2}$$

$$H(s) \sum_{n=0}^{N} a_n s^n e^{st} = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m e^{st} \tag{5.1.3}$$

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m e^{st}}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n e^{st}} \ . \tag{5.1.4}$$

מסקנה: אכן קיים פתרון פרטי כזה, בתנאי שהמכנה אינו אפס, כלומר בתנאי ש-s איננו שורש של הפולינום האפייני של המד"ר.

עבור מערכת קונוולוציה, נחשב את היציאה:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau \tag{5.1.5}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)\,d\tau \tag{5.1.6}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{st}e^{-s\tau}h(\tau)\,d\tau \tag{5.1.7}$$
$$= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}h(\tau)\,d\tau \tag{5.1.8}$$
$$= e^{st}H(s). \tag{5.1.9}$$

ושוב הגענו לתוצאה כי התגובה היא קבוע כפול אות הכניסה. כמובן שאם אותה מערכת מוגדרת גם דרך מד"ר וגם כמערכת קונוולוציה, אזי הפונקציה $H(s)$ חייבת להיות פונקציה אחת, הקשורה למערכת. הפונקציה $H(s)$ נקראת פונקצית התמסורת, ונלמד עליה בהמשך בהקשר של התמרת לפלס. בהקשר של מד"ר אנו רואים כי פונקציה זו היא תמיד מנה של שני פולינומים, ובקשר של מערכות קונוולוציה זוהי התמרת לפלס דו צדדית של תגובת ההלם (או גרעין הקונוולוציה). בפרט, אם $s = j\omega$ כאשר ω הוא מספר ממשי, אזי אות הכניסה הוא אות הרמוני, ואת ω ניתן לפרש כתדר זויתי. ל-$H(j\omega)$ אנו קוראים תגובת התדר של המערכת, מכיון שאם הכניסה היא אות הרמוני $e^{j\omega t}$ אזי התגובה לאות בתדר זה היא האות המקורי, המוכפל בקבוע שהוא תגובת התדר. הגדרת $H(j\omega)$ על ידי (5.1.8)--(5.1.9) היא בדיוק התמרת פוריה של תגובת ההלם h. עובדה זו מובילה אותנו לניתוח במישור התדר של מערכות לינאריות---דבר בעל משמעות פיזיקלית ואינטואיטיבית.

5.2 התמרת פוריה

עבור פונקציות ב-L_1 (הגדרה 4.1.2) נגדיר את התמרת פוריה דרך אינטגרל פוריה

$$\mathcal{F}\{x\}(\omega) = X(\omega) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{5.2.1}$$

אם $X(\omega)$ גם הוא ב-L_1 אזי נגדיר את התמרת פוריה ההפוכה

$$\mathcal{F}^{-1}\{X\}(t) = \hat{x}(t) \doteq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{5.2.2}$$

הסיבה לסימון $\hat{x}$ היא שלא מובטח לנו שההתמרה ההפוכה מחזירה את האות המקורי. הקשר בין x לבין $\hat{x}$ הוא מורכב וחשוב להבינו לעומק. חשוב להדגיש כי האינטגרל הוא דרך לחישוב התמרת פוריה, אך אינו הדרך היחידה להגדיר את ההתמרה. זוהי דרך תקפה רק לאותות ב-L_1, ובפרט האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,dt$$

אינו מוגדר כלל, וממילא אינו מגדיר את ההתמרה של האות 1 (האות השווה 1 לכל t).

אנו נשתמש בסימונים הבאים. $\mathcal{F}[x](\omega)$ היא התמרת פוריה של האות x. את הקשר ביניהם נסמן כך $x \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X$. נשים לב כי קשר זה אינו סימטרי כיוון ש-$x \neq \mathcal{F}[X]$, ולכן יש חשיבות לכך שהאות העיתי (פונקציה של המשתנה t) מופיע בצד שמאל וההתמרה, שהיא פונקציה של משתנה התדר, מופיעה בצד ימין.

5.3 חזרה

בסעיף זה נחזור על חומר מקורס טורי פוריה והתמרות אינטגרליות. עקב כך לא נציין את כל התנאים המתמטיים. בסעיף זה נניח שכל האותות הם ב-L_1 וגם ב-L_2. בסעיף הבא נרחיב לאותות שאינם מקיימים תנאים אלו.

משפט 5.3.1 אם x הוא אות ב-L_2 אזי יש לו התמרת פוריה שנסמן ב-X. ל-X יש התמרה הפוכה שנסמן ב-$\hat{x}$, ומתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 \, dt = 0 \, . \tag{5.3.1}$$

משפט זה הוא מופשט למדי, אך בהמשך נעמיק בו יותר. ישנם תנאים שונים המבטיחים כי ההתמרה מוגדרת בכל נקודה, וההתמרה ההפוכה מחזירה את האות המקורי.

משפט 5.3.2 תנאי דיריכלה. אם $x \in L_1$ אזי התמרת פוריה שלו מוגדרת היטב ו-$X(\omega)$ חסום. אם בנוסף $X \in L_1$ ומתקיימים התנאים הבאים:

1. האות x הוא בעל מספר סופי של נקודות מקסימום ומינימום בכל קטע זמן סופי,
2. האות x הוא בעל מספר סופי של נקודות אי רציפות בכל קטע זמן סופי,

אזי

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2} [x(t^-) + x(t^+)] \, . \tag{5.3.2}$$

כלומר, ההתמרה ההפוכה שווה לאות המקורי בכל נקודת רציפות, ושווה לממוצע הערכים בנקודות אי רציפות.

הוכחה: נוכיח רק את הטענה הראשונה: ההתמרה מוגדרת היטב, וכן

$$|X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-j\omega t} \right| |x(t)| \, dt = ||x||_1 \, . \tag{5.3.3}$$

מ.ש.ל.

5.3.1 תכונות ההתמרה:

משפט 5.3.3 התמרת פוריה היא פעולה לינארית:

$$a x_1 + b x_2 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} a X_1 + b X_2 \, . \tag{5.3.4}$$

הוכחה: עבור המקרה שההתמרה מוגדרת דרך האנטגרל---נובע מלינאריות האנטגרל. מ.ש.ל.

משפט 5.3.4 תכונות סימטריה של התמרת פוריה. אם $x(t) = x^*(t)$, כלומר הוא ממשי, אזי $X(\omega) = X^*(-\omega)$ כלומר הוא זוגי (במובן המרוכב).
אם x הוא זוגי (במובן המרוכב), כלומר $x^*(t) = x(-t)$, אזי $X(\omega)$ הוא ממשי.
אם $x(t) = x(-t)$ (סימטרי במובן הממשי) אזי $X(\omega) = X(-\omega)$. אם $x(t) = -x(-t)$ (אנטי סימטרי במובן הממשי) אזי $X(\omega) = -X(-\omega)$.

מהתכונה הראשונה נובע כי עבור אותות ממשיים ניתן להסתפק בתחום $\omega \geq 0$, שכן ערכי ההתמרה עבור ערכים שליליים נקבעים מתכונה זו. אנו לא נעשה זאת שכן השימוש בערכים שליליים של התדר מקילים על החישובים. הוכחה: אם x ממשי אזי

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{5.3.5}$$

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\,dt \tag{5.3.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt\,. \tag{5.3.7}$$

הוכחת שאר התכונות דומה. מ.ש.ל.

משפט 5.3.5 להתמרת פוריה ישנן התכונות הבאות. הזזה בזמן

$$x(t-\tau) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)e^{-j\omega\tau}\,. \tag{5.3.8}$$

הזזה בתדר

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega-\omega_0) \tag{5.3.9}$$

גזירה (במישור הזמן)

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\omega X(\omega)\,. \tag{5.3.10}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j\omega)^n X(\omega)\,. \tag{5.3.11}$$

קונוולוציה (במישור הזמן)

$$(x*y)(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)Y(\omega)\,. \tag{5.3.12}$$

קונוולוציה (במישור התדר) או כפל במישור הזמן

$$x(t)y(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}(X*Y)(\omega)\,. \tag{5.3.13}$$

שינוי סקלת זמן (או תדר)

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)\,. \tag{5.3.14}$$

משפט 5.3.6 דואליות *Duality*. תחת תנאים טכניים מתאימים, אם $f = \mathcal{F}[g]$ אזי $\mathcal{F}[f](\omega) = 2\pi g(-\omega)$.
באופן כללי יותר,

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}[h]\right)(u) = 2\pi h(-u)\,, \qquad \mathcal{F}^4[h] = 4\pi^2 h\,. \tag{5.3.15}$$

הוכחה: מההגדרה

$$\mathcal{F}[f](u) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-jus}\, ds \tag{5.3.16}$$

$$= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{j(-u)s}\, ds \tag{5.3.17}$$

$$= 2\pi \left(\mathcal{F}^{-1}[f]\right)(-u) \tag{5.3.18}$$

$$= 2\pi g(-u)\,. \tag{5.3.19}$$

מכאן נובעת גם השורה השניה. מ.ש.ל.

משמעות הנוסחה האחרונה היא כי הפעלה של $\mathcal{F}$ בחזקה רביעית היא---עד כדי כפל בקבוע---העתקת הזהות: היא מחזירה את האות המקורי. מכאן נובע מיידית כי

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{\mathcal{F}^3}{4\pi^2}\,. \tag{5.3.20}$$

משפט 5.3.7 (פלנשרל *Plancherel*). לכל x, y ב-L_2,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega)\, d\omega\,. \tag{5.3.21}$$

תכונה זו מגדירה את $X(\omega)$ במובן הבא. בהנתן $x(t) \in L_2$ ו-$Z(\omega)$, אם לכל $y \in L_2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) Y^*(\omega)\, d\omega \tag{5.3.22}$$

אזי בהכרח $Z \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} x$. בפרט, את האנרגיה של האות ניתן לחשב בתחום הזמן או בתחום התדר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega\,. \tag{5.3.23}$$

הערה: מכיוון שאין לנו נוסחה לחישוב התמרת פוריה עבור אותות ב-L_2, המשפט נותן לנו תחליף: שיטה לבדוק אם מועמד מסויים הוא אכן התמרת פוריה. בהמשך נראה כי אפשר להשתמש בהגדרה דומה 5.4.1 גם לצורך חישוב ההתמרה.

הוכחה (של (5.3.21) ו-(5.3.23) בלבד): עבור x, y שהם ב-L_2 וגם ב-L_1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]^* dt \tag{5.3.24}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}x(t)\,dt\right] d\omega \tag{5.3.25}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(\omega)X(\omega)\,d\omega\,. \tag{5.3.26}$$

ניתן להרחיב זאת לאותות שאינם בהכרח ב-L_1 על ידי קרובים. את הטענה השניה לא נוכיח כאן. מ.ש.ל.

משפט זה מראה כי את האנרגיה של אות ניתן לחשב גם דרך מישור הזמן, אך גם דרך האות במישור התדר. מכאן ש-$X(\omega)$ מתאר את "גודל" האות בתדר ω. בהמשך נראה כי נוסחה זו היא המפתח להתמרת פוריה הכללית יותר.

5.4 התמרת פוריה לפונקציות מוכללות

ראשית יש להדגיש כי ניתן לפרש פונקציות רגילות כפונקציות מוכללות: כך למשל פונקצית המדרגה u איננה ב-L_1 וגם לא ב-L_2. לכן לא ניתן להפעיל עליה את נוסחת האינטגרל להתמרת פוריה. כמובן שהבחנה זו נכונה גם לפונקציות מוכללות.

למרות שההגדרה דרך האינטגרל איננה אפשרית, מסתבר שניתן להגדיר התמרת פוריה גם לפונקציות מוכללות. לצורך ההגדרה, נשים לב כי אם f היא פונקציה ב-L_1 ו-ϕ היא פונקצית בחן של המשתנה ω, אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\phi(\omega)\,d\omega\,dt \tag{5.4.1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\phi(\omega)\,d\omega\right) dt \tag{5.4.2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt. \tag{5.4.3}$$

נשים לב כי התמרת פוריה של פונקצית בחן היא בעצמה פונקצית בחן. קשר זה אשר הוכחנו עבור פונקציות ב-L_1 משמש למעשה הגדרה של התמרת פוריה של פונקציה מוכללת.

הגדרה 5.4.1 התמרת פוריה של פונקציה מוכללת f של המשתנה t היא פונקציה מוכללת של המשתנה ω, אשר נסמן ב-$\mathcal{F}(f)$, והיא מוגדרת דרך פעולתה על פונקציות בחן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)\phi(\omega)\,d\omega \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt. \tag{5.4.4}$$

צד שמאל של המשוואה מתאר את הפעולה של הפונקציה המוכללת אשר קיבלנו על ידי התמרת פוריה של f; זאת על ידי בדיקת פעולתה על פונקצית בחן. צד ימין מוגדר היטב שכן הוא בדיוק הפעולה של הפונקציה המוכללת f על פונקצית בחן.

הערה מתמטית: כדי לוודא שהתמרת פוריה של פונקציה מוכללת היא אכן פונקציה מוכללת עלנו לבדוק שני דברים: לינאריות ורציפות. בנקודה השניה לא נדון כאן, אולם הלינאריות היא מיידית שכן האנטגרל של התמרת פוריה הוא לינארי, לכן צד ימין של ההגדרה לינארי ולכן גם צד שמאל.

כיוון שהגדרנו התמרת פוריה דרך תכונות של ההתמרה האינטגרלית, כל תכונות התמרת פוריה נשמרות. בפרט, יש קשר חד חד ערכי בין פונקציה לבין התמרת פוריה שלה, במובן של ההגדרה (ראינו בהקשר של תנאי דיריכלה שהקשר אינו ביחס לערך בכל נקודה).

דוגמה 5.4.2 נחשב את התמרת פוריה של פונקצית הלם:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\delta\}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\phi(\omega)\,d\omega\,dt \tag{5.4.5}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t)\,dt\,d\omega \tag{5.4.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega)\cdot 1\,d\omega, \tag{5.4.7}$$

ולכן התמרת פוריה של דלתה היא הפונקציה 1, כלומר הפונקציה השווה 1 לכל t:

$$\boxed{\delta \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1}\;. \tag{5.4.8}$$

בכוון ההפוך, נחשב את התמרת פוריה של הפונקציה 1.

דוגמה 5.4.3 כדי לחשב את התמרת פוריה של הפונקציה 1 נתייחס אליה כאל פונקציה מוכללת. נשתמש בהגדרה ונקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{1\}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt \tag{5.4.9}$$

$$= 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\cdot 0\cdot t}\cdot\mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt \tag{5.4.10}$$

$$= 2\pi\phi(0) \tag{5.4.11}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)\phi(\omega)\,d\omega \tag{5.4.12}$$

כאשר השוויון הלפני האחרון התקבל כי זו התמרה הפוכה של ההתמרה של ϕ בנקודה $\omega = 0$; כיוון ש-ϕ היא פונקצית בחן, ההתמרה ההפוכה של ההתמרה נותנת את הערך המקורי של הפונקציה. השוואה של האיבר הראשון לאחרון מראה כי $\mathcal{F}\{1\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$.

מתכונת ההזזה בתדר והתמרת פוריה של 1 נקבל

$$\mathcal{F}\left(e^{j\omega_0 t}\right)(\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)\,. \tag{5.4.13}$$

כיוון ש-

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \tag{5.4.14}$$

נקבל מתכונת הלינאריות של ההתמרה כי

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0\cdot)](\omega) = \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]\,. \tag{5.4.15}$$

דוגמה 5.4.4 נחשב את ההתמרה של $x(t) = t^n$. כמובן שזוהי פונקציה מוגדרת היטב, אך היא בוודאי אינה ב-L_1, ולכן לא ניתן להשתמש בנוסחה האינטגרלית לחישוב ההתמרה. מהגדרה (5.4.4) נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x\}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt \tag{5.4.16}$$

$$= (-j)^n \int_{-\infty}^{\infty} (jt)^n \mathcal{F}\{\phi\}(t)\,dt. \tag{5.4.17}$$

אולם ראינו כי $(jt)^n \mathcal{F}\{\phi\}(t)$ היא התמרת פוריה של $\frac{d^n}{d\omega^n}\phi(\omega)$. לכן, כמו בדוגמה הקודמת,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{x\}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega = (-j)^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{d\omega^n}\phi\right\}(t)\,dt \tag{5.4.18}$$

$$= (-j)^n 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j0t} \mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{d\omega^n}\phi\right\}(t)\,dt \tag{5.4.19}$$

$$= 2\pi(-j)^n \phi^{(n)}(0) \tag{5.4.20}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)\phi(\omega)\,d\omega \tag{5.4.21}$$

כאשר השוויון השלישי הוא התמרה הפוכה של הנגזרת ה- n-ית $\phi^{(n)}$ בנקודה $\omega = 0$. מהשוואת הביטוי הראשון והאחרון קיבלנו $\mathcal{F}\{t^n\} = 2\pi j^n \delta^{(n)}$.

משפט 5.4.5 התמרת פוריה של פונקציה מוכללת היא פונקציה מוכללת. ההתמרה מוגדרת דרך *5.4.1* ויש לה את התכונות של התמרת פוריה המופיעות במשפטים *5.3.3*, *5.3.4*, *5.3.5* ו-*5.3.6*. הקשר בין הפונקציה וההתמרה הוא חד חד ערכי כלומר לכל פונקציה יש התמרה יחידה ולכל התמרה מתאימה פונקציה אחת. היחידות היא במובן של פונקציות מוכללות.

האות $x(t) = \mathrm{sign}(t)$ איננו ב-L_1 ולכן לא ניתן לחשב את ההתמרה דרך אינטגרל פוריה. כיוון שזהו אות בסיסי ומהווה נקודת מוצא לחישובים אחרים, ננסה לתאר את חישוב ההתמרה שלו. הפיתוח המתמטי המדויק הוא מורכב, ולא נתאר אותו כאן.
ראשית, נשים לב כי מהתכונה

$$\mathcal{F}\left(\frac{dx}{dt}\right)(\omega) = j\omega X(\omega) \tag{5.4.22}$$

נובע כי אם מתקיים

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \tag{5.4.23}$$

אזי $j\omega X(\omega) = j\omega Y(\omega)$ לכל $\omega \neq 0$. השוויון של הנגזרות מבטיח כי $x(t) - y(t) = c$ הוא קבוע שאינו תלוי ב-t. יתרה מכך, אם ידועה לנו התמרת פוריה של הנגזרת, נאמר

$$\mathcal{F}\left(\frac{dx}{dt}\right)(\omega) = Y(\omega) \tag{5.4.24}$$

אזי בהכרח, עבור כל $\omega \neq 0$

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}Y(\omega) + Z(\omega) \tag{5.4.25}$$

כאשר $Z(\omega)$ מתאפס לכל $\omega \neq 0$. כמובן שפירוש הדבר הוא כי $Z(\omega)$ הוא או 0, או שהוא פונקציה מוכללת שהשפעתה היא רק סביב 0, דוגמת δ ונגזרותיה.
עבור אות אנטי-סימטרי ואינטגרבילי,

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\cdot 0\cdot t} x(t)\, dt = 0 \tag{5.4.26}$$

עקב האנטי-סימטריה. לכן אנו מצפים כי תכונה זו תהיה תקפה גם עבור אותות אנטי-סימטריים שאינם אינטגרבילים. בפרט,

$$\mathcal{F}[\mathrm{sign}](0) = 0\,. \tag{5.4.27}$$

מתוך תכונת הנגזרת,

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{sign}\right)(\omega) = \mathcal{F}(2\delta) = 2\,. \tag{5.4.28}$$

מכאן נובע כי

$$\mathcal{F}(\mathrm{sign})(\omega) = \frac{2}{j\omega} \tag{5.4.29}$$

כאשר בגלל תכונת האנטי סימטריה מובטח לנו שאין צורך להוסיף תיקון, כלומר $Z(\omega) = 0$.
כיוון שפונקצית המדרגה מקיימת

$$u(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(t) + 1) \tag{5.4.30}$$

נובע מהלינאריות של התמרת פוריה ומההתמרה של 1 כי

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{j\omega} + 2\pi\delta(\omega)\right) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\,. \tag{5.4.31}$$

את התוצאה וכן מסקנה חשובה ממנה נסכם:

משפט 5.4.6 עבור פונקצית המדרגה ופונקצית הסימן מתקיים

$$\mathcal{F}(\mathrm{sign})(\omega) = \frac{2}{j\omega} \tag{5.4.32}$$

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \tag{5.4.33}$$

התמרה של אינטגרל

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right) = \frac{X(\omega)}{j\omega}\mathbf{1}_{\{\omega\neq 0\}} + \pi X(0)\delta(\omega)\,. \tag{5.4.34}$$

הוכחה: נוכיח רק את הביטוי האחרון. מתכונת הקונוולוציה,

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(x * u\right)(\omega) \tag{5.4.35}$$

$$= X(\omega)\cdot\mathcal{F}(u)(\omega) \tag{5.4.36}$$

$$= X(\omega)\cdot\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right] \tag{5.4.37}$$

$$= \frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)\,. \tag{5.4.38}$$

מ.ש.ל.

5.5 פוריה, אותות ומערכות

נתבונן שוב בהגדרה האינטגרלית (5.2.2) של התמרת פוריה הפוכה. נזכר כי אינטגרל אינו אלא קירוב לסכום:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega)e^{jk\Omega t}\Omega\,. \tag{5.5.1}$$

כלומר פירקנו את האות x לאוסף של פונקציות הרמוניות מהצורה $e^{jk\Omega t}$ כאשר המקדם של הפונקציה ההרמונית בתדר $k\Omega$ הוא בדיוק $X(k\Omega)$---הערך של התמרת פוריה בתדר זה. אם כך, ככל שהערך של $X(\omega)$ גדול יותר בתדר מסויים, כך ניתן לומר כי לאות מרכיב גדול בתדר זה. בכיוון ההפוך, אם $X(\omega_0)=0$ אזי ל-x אין אנרגיה בתדר זה.

כפי שראינו בסעיף 5.1 תגובת מערכת קונוולוציה לאות הרמוני מהצורה $e^{j\omega t}$ היא

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}\,. \tag{5.5.2}$$

ל-H אנו קוראים תגובת התדר של המערכת משום שהיא מתארת את הגודל של תגובת המערכת לאותות הרמוניים בתדרים השונים. באופן כללי יותר ראינו כי התגובה לכניסה x היא

$$y(t) = (x * h)(t) \tag{5.5.3}$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{5.5.4}$$

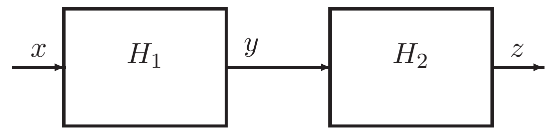
כאשר H היא התמרת פוריה של גרעין הקונוולוציה, שהוא תגובת ההלם.

התמרת פוריה נותנת לנו כלי נוח לנתח חיבורים של מערכות. כיוון שהקשר בין כניסה ויציאה הוא אלגברי

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{5.5.5}$$

קל יחסית לנתח גם חיבורים מורכבים.

דוגמה 5.5.1 חיבור מערכות בטור מתואר על ידי השרטוט המצורף. נקבל מייד כי



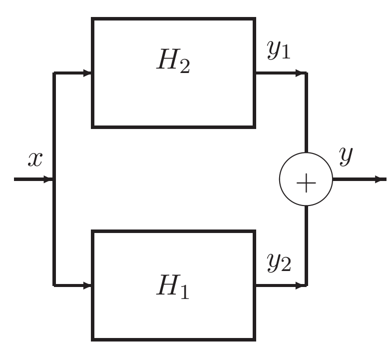
איור 5.1: חיבור מערכות בטור

$$Z(\omega) = H_2(\omega)Y(\omega) \tag{5.5.6}$$
$$= H_2(\omega)H_1(\omega)X(\omega) \tag{5.5.7}$$

ולכן תגובת התדר של המערכת הכוללת היא

$$H(\omega) = H_2(\omega)H_1(\omega)\,. \tag{5.5.8}$$

דוגמה 5.5.2 חיבור מערכות במקביל מתואר על ידי השרטוט המצורף. נחשב את תגובת התדר הכוללת.



איור 5.2: חיבור מערכות במקביל

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) \tag{5.5.9}$$
$$= H_1(\omega)X(\omega) + H_2(\omega)X(\omega) \tag{5.5.10}$$
$$= (H_1(\omega) + H_2(\omega))X(\omega) \tag{5.5.11}$$

ולכן תגובת התדר של המערכת הכוללת היא $H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$.

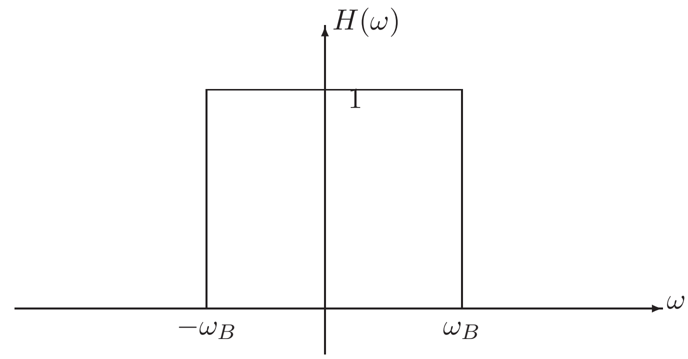
בהסתכלות של פרק זה, אפשר לפרש את השפעת המערכת על אות הכניסה כך: המערכת משפיעה בצורה שונה על רכיבי האות בתדרים שונים. המערכת מסננת תדרים בהם $H(\omega)$ הוא קטן, ומחזקת את האות בתדרים בהם $H(\omega)$ גדול. בהסתכלות כזו על מערכת טיבעי לקרוא למערכת "מסנן". מסנן אם כך הוא מערכת, כאשר ההסתכלות היא דרך השאלה---כיצד משפיעה המערכת על אות הכניסה בכל תדר.

5.5.1 מסננים

המסננים הבסיסיים ביותר מיועדים אכן לסנן תדרים מסויימים.

הגדרה 5.5.3 מסננים מעבירי סרט. מסנן מעביר נמוכים *Low Pass Filter* אידיאלי עם תדר קטעון ω_B הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

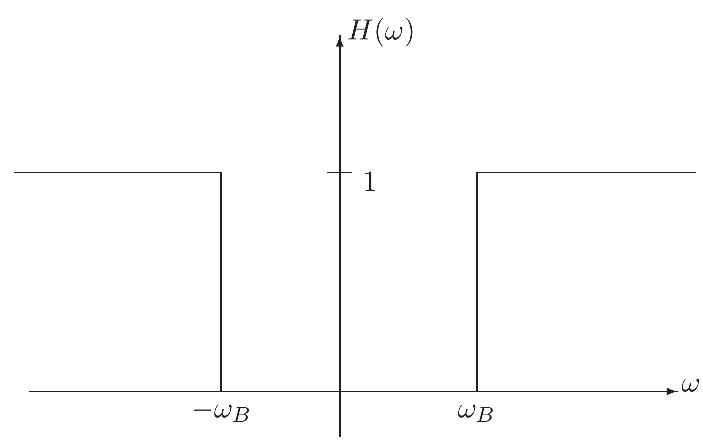
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B\,. \end{cases} \tag{5.5.12}$$



איור 5.3: מסנן מעביר נמוכים

מסנן מעביר גבוהים *High Pass Filter* אידיאלי עם תדר קטעון ω_B הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

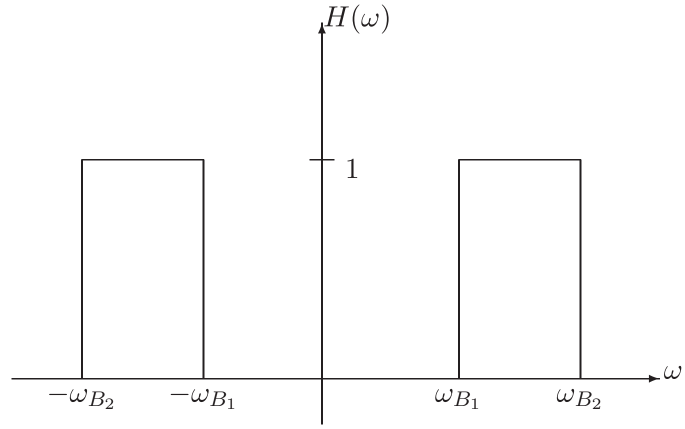
$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| > \omega_B \\ 0 & |\omega| < \omega_B\,. \end{cases} \tag{5.5.13}$$



איור 5.4: מסנן מעביר גבוהים

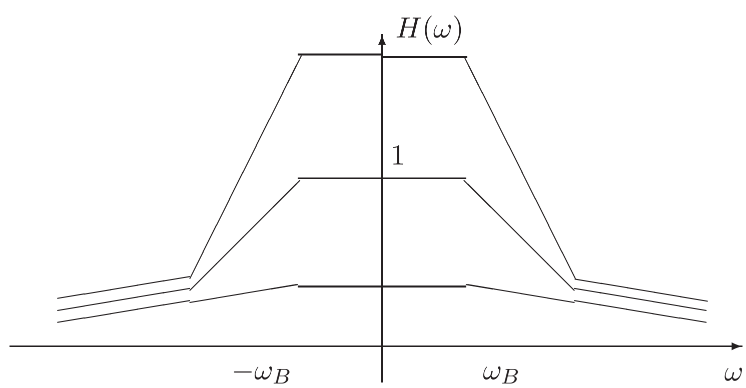
מסנן מעביר סרט *Band Pass Filter* אידיאלי בתדרים $\omega_{B_1}, \omega_{B_2}$ הוא מערכת אשר תגובת התדר שלה היא

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{B_1} < |\omega| < \omega_{B_2} \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{5.5.14}$$



איור 5.5: מסנן מעביר סרט

דוגמה 5.5.4 מסנן פרמטרי הוא מסנן אשר ניתן לכוונן את צורתו או גובהו. מסננים כאלו נמצאים בכל מערכת סטראו; לדוגמה, המסנן שתפקידו להנחית (להקטין) או להגביר את התדרים הנמוכים, בהתאם לבחירת המשתמש. מסנן פרמטרי נראה בקירוב כמתואר בשרטוט, כאשר האמצעי מתאר את ההתנהגות כאשר המסנן אמור להעביר ללא כל שינוי את תחום התדרים הרלוונטי. אנו רואים כי מסנן מעשי יכול להעביר בצורה סבירה רק תחום תדרים מוגבל; מעבר להם הוא מנחית. בנוסף, המסנן אינו אידאלי (כלומר אינו בצורת מלבן), ולכן לא ברור מהו תחום התדרים המדויק בו נאמר שהמסנן מעביר ללא הנחתה, ובאיזה תחום הוא מנחית. החלטה זו היא שרירותית, ונלקחת משיקולים הנדסיים. עוד בנושא נראה בפרק 9. בשרטוט הקו התחתון מתאר את תגובת התדר של המסנן כאשר הוא מכוונן להנחית את התדרים הנמוכים, והקו העליון מתאר את תגובתו כאשר הוא מגביר תדרים נמוכים.



איור 5.6: מסנן פרמטרי מעביר נמוכים

דוגמה 5.5.5 רמקול איכותי למערכות שמע מורכב למעשה ממספר רמקולים באותה קופסה. הסיבה לשימוש במספר רמקולים היא שקשה לבנות רמקול איכותי אשר יכול לתרגם אותות חשמליים לאותות אקוסטיים בצורה נאמנה על פני טווח תדרים גדול. זאת כיוון שבתדרים נמוכים יש צורך להזיז כמויות אויר גדולות, ולכן צריך רמקול גדול, אך רמקול כזה מתקשה לנוע בתדירויות גבוהות. מסיבה זו בדרך כלל ישנם שלושה רמקולים, הזוכים לשמות *Woofer*---רמקול המטפל בתדרים נמוכים ($70-700$ הרץ), *mid-range*---רמקול המטפל בתדרי הביניים ($700-5000$ הרץ), ו-*tweeter*---רמקול המטפל בתדרים גבוהים (במערכות איכותיות במיוחד יש *subwoofer* לתדרים נמוכים מאד). כחלק מהרמקול בונים מעגל, הנקרא *crossover*, ואשר תפקידו הוא להעביר לכל רמקול רק את תחום התדרים הנוגע לו. זאת כדי לנצל

טוב יותר את אנרגיית האות, ולהמנע מלגרום נזקים לרמקולים. המעגל מיישם בדוגמה שלנו שלוש מערכות---מסנן מעביר נמוכים המעביר ל-*woofer* את התדרים הנמוכים, מסנן מעביר סרט ומסנן מעביר גבוהים המעבירים את התדרים המתאימים לרמקולים האחרים. בנוסף משתמשים לעיתים במעגל החשמלי כדי לתקן עיוותים של הרמקולים. רמקול אידאלי מקבל אות חשמלי בתחום תדרים נתון, והופך אותו לאות אקוסטי ללא שינוי. כלומר תגובת המערכת היא קבועה:

$$H(\omega)=\begin{cases}K & \omega_{B_1}<\omega<\omega_{B_2}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases} \tag{5.5.15}$$

אולם רמקולים מעשיים כידוע אינם אידאלים. ניתן לקזז על כך במידת מה על ידי מעגל חשמלי---מסנן, שיוגדר כך. אם תגובת התדר של הרמקול היא $H_L(\omega)$ ניישם מסנן אשר תגובת התדר שלו היא

$$H_F(\omega)=\begin{cases}K/H_L(\omega) & \omega_{B_1}<\omega<\omega_{B_2}\\ 0 & \text{אחרת.}\end{cases} \tag{5.5.16}$$

האות החשמלי נכנס למסנן ואחריו לרמקול, כלומר המערכות פועלות בטור. תגובת התדר של שתי המערכות ביחד היא לכן

$$H(\omega)=H_L(\omega)H_F(\omega)=\begin{cases}K & \omega_{B_1}<\omega<\omega_{B_2}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases} \tag{5.5.17}$$

בדיוק התגובה הרצויה.

דוגמה 5.5.6 הפחתת רעשים על ידי זוג מסננים. ראינו כי ניתן להעזר במסנן כדי לתקן את תגובת התדר של מערכת בעזרת מערכת מקדימה (*pre-filter*). נתבונן כעת במערכת נתונה אשר פעולתה כוללת רעשים. זהו המצב למשל בטייפ, צורב תקליטורים או צורב *DVD*; עקב חיכוך מכני נוצרים רעשים במערכת בשלב ההקלטה, ובצורה דומה נוצרים רעשים בזמן ההשמעה. נחשוב אם כן על הפעולה הכוללת: אות הכניסה עובר דרך מערכת לינארית ונוסף לו רעש:

$$y(t)=x(t)*h(t)+n(t)\quad Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)+N(\omega)\ . \tag{5.5.18}$$

כמו בדוגמאות קודמות, אין לנו שליטה על H ועל N. נניח (מצב מעשי) שאות הרעש חלש בתדרים נמוכים וחזק יחסית בתדרים גבוהים. ניצור מערכת חדשה על ידי הוספת שני מסננים: מסנן מקדים *pre-filter* המתואר על ידי H_1, אשר מגביר תדרים גבוהים, ומסנן סופי *post-filter* המתואר על ידי H_2 כך ש-$H_1(\omega)H_2\omega)=1$ בתחום התדרים הרלוונטי. בגלל לינאריות המערכות, סדר ההפעלה אינו חשוב. בגלל התכונה האחרונה, זוג המסננים לא ישנה את הקשר בן כניסה ליציאה. אולם מבחינת הרעש $N(\omega)$ הוספנו רק את מסנן H_2 אשר מנחית את התדרים בהם הרעש גדול. קיבלנו הפחתת רעשים.

מסנן דולבי כולל רכיב מסוג זה: בזמן ההקלטה מופעל H_1 כלומר מוגברים התדרים הגבוהים באות הכניסה. בזמן ההשמעה מונחתים התדרים הגבוהים על ידי H_2, וכך נשמר האות המקורי מצד אחד, בעוד שהרעש מדוכא.

מסנן דולבי כולל גם רכיב לא לינארי, בו לא נדון.

בצורה דומה ניתן להגדיר גם מסנן חוסם נמוכים Low Stop Filter אשר כמובן אינו אלא מסנן מעביר גבוהים. הגדרת מסנן חוסם גבוהים דומה. לבסוף, מסנן חוסם סרט Band Stop Filter מעביר את כל התדרים למעט חלון תדרים. את כל המסננים המתוארים לעיל אפשר לבנות משתי מערכות בסיסיות: מערכת אשר תגובת התדר שלה היא 1 בכל התדרים, ומסנן מעביר נמוכים. זאת על ידי חיבורים במקביל ובטור. לכן נסתפק בהעמקה בנושא מסנן מעביר נמוכים.

נחשב את תגובת ההלם של מסנן מעביר נמוכים עם תדר קטעון B.

$$h_{LPF}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[H_{LPF}\right] \tag{5.5.19}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{LPF}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{5.5.20}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{j\omega t}\,d\omega \tag{5.5.21}$$

$$= \frac{1}{2\pi jt}\left[e^{jBt} - e^{-jBt}\right] \tag{5.5.22}$$

$$= \frac{1}{\pi t}\sin(Bt) \tag{5.5.23}$$

$$= \frac{B}{\pi}\frac{\sin Bt}{Bt} \tag{5.5.24}$$

$$= \frac{B}{\pi}\,\mathrm{sinc}(Bt)\,. \tag{5.5.25}$$

הפונקציה sinc שווה 1 ב-$t = 0$ וזה הערך המקסימלי שלה. הפונקציה מתאפסת בכפולות שלמות של π למעט כאמור ב-0. נשים לב כי אות זה שונה מאפס גם לערכים גדולים של t וגם לערכים שליליים של t. מכאן שהוא מתאר מערכת לא סיבתית, עם תגובת הלם שאינה סופית. העובדה הראשונה גוררת כי לא ניתן לממש מסנן כזה בזמן אמיתי, ולכן לא ניתן לממש מסנן מעביר נמוכים אידאלי. כדי לממש מסנן מקורב נממש מסנן עם השהיה: נשהה את תגובת ההלם, ונאפס אותה בזמנים שליליים. ככל שההשהיה גדולה יותר כך תשמר יותר צורת האות---ושיווי המשקל בין השהיה ועיוות הוא שיקול הנדסי התלוי במטרת המסנן.

5.5.2 מערכת פאזה לינארית

מערכת פאזה לינארית מוגדרת דרך תגובת התדר, בהתאם לדרישות כי

$$|H(j\omega)| = 1, \tag{5.5.26}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \alpha\omega\,. \tag{5.5.27}$$

עבור α כלשהו. משמעות שתי הדרישות היא כי $H(j\omega) = e^{j\alpha\omega}$. אם כן, פעולת המערכת על אות x היא

$$Y(\omega) = X(\omega)e^{j\alpha\omega} \tag{5.5.28}$$

ולכן

$$y(t) = x(t+\alpha)\,. \tag{5.5.29}$$

כלומר זוהי השהיה.

5.6 דוגמאות לשימוש בהתמרת פוריה

בסעיף זה נראה מספר דוגמאות לשימושים הנדסיים של התמרת פוריה. ניתן תאור (פשטני אך נכון עקרונית) של איפנון ושל ריבוב. בהמשך נתאר את מושג המסנן ותאורו בתחום התדר.

5.6.1 איפנון

נניח שאנו מעוניינים להעביר אות שמע (דיבור, מוסיקה) למרחק רב. האטמוספירה מנחיתה אותות בתדרי השמע $(0-20KHz)$, ולכן קשה להעבירם למרחק רב. לעומת זאת האטמוספירה מעבירה אותות אלקטר-ומגנטיים בצורה טובה למדי. כדי ליצר גל אלקטרומגנטי יש צורך באנטנה, אשר אורכה צריך להיות קרוב לאורך הגל. אנטנה אשר מתאימה לאורך הגל המתאים לאות שמע בתדר גבוה תהיה באורך של

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{300,000}{20,000}\frac{km/sec}{1/sec}=15km\,. \tag{5.6.1}$$

מעט ארוך בשביל אנטנה מעשית. לצורך תדרים נמוכים יותר בתחום השמע המצב חמור אף יותר. ננסה לכן להלביש את האות הרצוי x על אות (אלקטרומגנטי) בתדר גבוה בהרבה. התדרים המקובלים לשידורי גלים אלקטרומגנטיים הם מ-$500KHz=0.5MHz$ עד $3000MHz=3GHz$. אות חוזי (וידאו) סטנדרטי מגיע עד תדר $5.5MHz$ וכפי שנראה בהמשך כדי להעבירו נצטרך תדרים אלקטרומגנטיים גבוהים יותר.
שיטת האפנון הפשוטה ביותר נקראת איפנון אמפליטודה---AM—Amplitude Modulation. בשיטה זו מייצרים אות בתדר שנסמן ב-ω_0: נניח $\cos(\omega_0 t)$ ומכפילים בו את האות הרצוי---נקבל אות חדש

$$y(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)\,. \tag{5.6.2}$$

את האות החדש נשדר. אם x הוא אכן אות שמע, אזי הוא בעל גודל משמעותי עד סביב $20KHz$, ולכן נצפה כי $X(\omega)\approx 0$ עבור $\omega\gg 20KHz$. נבצע התמרת פוריה לאות המשודר: לפי (5.4.15) ותכונת הקונוולוציה בתדר,

$$\mathcal{F}\left(x\cos(\omega_0 t)\right)(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t))(\omega) \tag{5.6.3}$$
$$=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) \tag{5.6.4}$$
$$=\frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right)\,. \tag{5.6.5}$$

אם לכל ω לפחות אחד מהאותות מתאפס, כלומר או ש-$X(\omega-\omega_0)=0$ או $X(\omega+\omega_0)=0$, אזי ברור אינטואיטיבית שלא איבדנו שום מידע: אנו יודעים בדיוק מה צורתו של $X(\omega)$. נניח אם כן כי קיים ω_B כך ש-$X(\omega)=0$ עבור $|\omega|>\omega_B$, ותדר הגל הנושא מקיים $\omega_0>\omega_B$.
כדי לשחזר את האות Demodulation נכפיל את האות המשודר שוב באותו אות cos, עם אותו תדר ואותה פאזה (האמפליטודה אינה חשובה כל עוד היא ידועה שכן תמיד ניתן להעביר את האות במגבר מתאים). נסמן את האות המשוחזר ב-z. נקבל

$$z(t)=y(t)\cos(\omega_0 t) \tag{5.6.6}$$
$$Z(\omega)=\frac{1}{2}\left[Y(\omega-\omega_0)+Y(\omega+\omega_0)\right] \tag{5.6.7}$$
$$=\frac{1}{2}X(\omega)+\frac{1}{4}X(\omega-2\omega_0)+\frac{1}{4}X(\omega+2\omega_0)\,. \tag{5.6.8}$$

כל שנותר לנו זה לזרוק את החלקים המיותרים. נבנה מערכת קונוולוציה אשר התמרת פוריה של גרעין הקונוולוציה $H(\omega)$ מקיימת

$$H(\omega) = \begin{cases} 2 & |\omega| < \omega_B \\ 0 & |\omega| > \omega_B \,. \end{cases} \tag{5.6.9}$$

כלומר מסנן מעביר נמוכים. אם נכניס את z למערכת זו נקבל במוצא

$$Z(\omega)H(\omega) = X(\omega)\,. \tag{5.6.10}$$

כלומר קבלנו שיחזור מושלם את האות הרצוי, יחד עם שינוי תדריו לצורך שידור.
כמובן שבאופן מעשי קשה לדרוש שמערכת השחזור תהיה בתאום תדר ותאום פאזה מושלם עם מערכת האיפנון. ניתן ליצור מערכת שיחזור המבוססת על גלוי מעטפת. כדי למנוע חוסר בהירות באשר לסימן של האות, יש צורך להזיז את האות על ידי תוספת קבוע, על מנת שיהיה חיובי תמיד. במצב זה קל לראות כי גלאי מעטפת ישחזר את האות. אולם זו אינה מערכת לינארית והכלים שבידינו אינם מאפשרים לנתח את התנהגותה.

5.6.2 ריבוב

בסעיף הקודם גילינו כיצד לשדר אותות שמע על גבי אותות אלקטרומגנטיים, בתדר גבוה בהרבה. הצעד הבא הוא שימוש יעיל בתדרים שונים על מנת להעביר כמות מידע גדולה יותר. זאת על ידי ניצול תדרים שונים בשיטת FDM: Frequency Division Multiplexing. שיטה זו משמשת בכל העולם להעברת שידורי רדיו, טלויזיה ועוד. לשם המחשה נניח שיש לנו שלושה אותות אותם אנו מעוניינים לשדר. נסמן אותם ב-x_1, x_2, x_3. נניח לשם פשטות שכולם מוגבלים בתדר, כלומר קיים ω_B כך שמתקיים $X_i(\omega) = 0$ עבור $|\omega| > \omega_B$. נבחר ω_i כך שיתקיים

$$\omega_B < \omega_1 \tag{5.6.11}$$

$$\omega_1 + 2\omega_B < \omega_2 \tag{5.6.12}$$

$$\omega_2 + 2\omega_B < \omega_3\,. \tag{5.6.13}$$

נכפיל כל אחד מאותות הכניסה ב- cos בתדר המתאים ונחבר. האות שהתקבל, שהוא האות שנשדר, הוא

$$y(t) = x_1(t)\cos\omega_1 t + x_2(t)\cos\omega_2 t + x_3(t)\cos\omega_3 t\,. \tag{5.6.14}$$

בתחום התדר (התמרת פוריה) נקבל

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}\Big[X_1(\omega-\omega_1) + X_1(\omega+\omega_1) + X_2(\omega-\omega_2) + X_2(\omega+\omega_2) + X_3(\omega-\omega_3) + X_3(\omega+\omega_3)\Big]\,. \tag{5.6.15}$$

בגלל התנאי שהצבנו על x_i (רוחב סרט) והקשרים בין תדרי האפנון, קל לראות כי אין שום חפיפה (במישור התדר) בין ההתמרות של האותות השונים, ולפיכך ניתן לשחזרם. נשחזר לדוגמה את האות הראשון. את

האות הנקלט (שהוא y) נעביר תחילה דרך מסנן מעביר סרט:

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega - \omega_1| \le \omega_B \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{5.6.16}$$

אם נעביר את האות הנקלט Y במסנן זה נקבל במוצא

$$Y(\omega)H_1(\omega) = \frac{1}{2}[X_1(\omega - \omega_1) + X_1(\omega + \omega_1)]\,. \tag{5.6.17}$$

מכאן אנו יודעים לשחזר את x_1: עשינו זאת בסעיף הקודם כאשר דנו באיפנון. נכפיל ב-$\cos\omega_1 t$ ונעביר במסנן מעביר נמוכים H המעביר רק תדרים מתחת ל-ω_B.

המערכת שקיבלנו מאפשרת להעביר בו זמנים מספר אותות, כאשר כל אות מרוכז סביב תדר משלו, וכל אות מוגבל ברוחב הסרט בו הוא משתמש, כך שלא תהיינה חפיפות בין האותות. כך ניתן יהיה לשחזרם. רק לצורך המחשה, אם אנו משדרים אותות שמע, אשר רוחב הסרט שלהם הוא כ-$20KHz$ ומשתשמים בתחום שבין $1.5GHz - 2.5GHz$ הרי שדרישת ההפרדה (מרווח של $2\omega_B$ בין שני תדרים) מאפשרת העברה (החישוב ב-KHz) של

$$\frac{1,000,000}{2 \cdot 20} = 25,000 \tag{5.6.18}$$

אותות בו זמנית.

5.7 תוספות---התמרת פוריה

נניח שלפונקציה f יש תמך סופי: כלומר קיים אינטרוול $[a,b]$ כך ש-$f(t) = 0$ לכל $t \notin [a,b]$. כאשר התמרת פוריה מוגדרת דרך האינטגרל

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt \tag{5.7.1}$$

אזי F היא פונקציה גזירה (של המשתנה $j\omega$, ובאופן כללי יותר של המשתנה המרוכב s המגדיר את התמרת לפלס). לכן היא פונקציה אנליטית, ובפרט F אינה יכולה להתאפס על שום אינטרוול (ב-ω). בפרט, לא יתכן של-F יהיה תמך סופי.

בעזרת תכונות התמרת פוריה ניתן לקבל מידע על היחס בין "פיזור האות" בזמן לבין "פיזור האות" בתדר. מתכונת שינוי סקלת זמן תדר (משוואה (5.3.14), משפט 5.3.5)

$$x(at) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{5.7.2}$$

אנו רואים כי הגדלת הפיזור בזמן (על ידי בחירת a גדול) תגרום להקטנת הפיזור בתדר. בפרט, $\delta \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$ כלומר האות המרוכז ביותר בזמן מפוזר בצורה אחידה על כל תחום התדרים, ומהדואליות אות המרוכז בתדר בודד בהכרח יהיה מפוזר על פני כל ציר הזמן. השאלה היא: האם קיימים אותות שהפיזור שלהם הן בזמן והן בתדר הוא קטן באופן שרירותי? כמובן שהתשובה תלויה בהגדרת הפיזור. ראינו שהתשובה היא שלילית אם שואלים על התמך של האותות. מידע שונה נקבל על ידי הגדרה כמותית של פיזור של אות.

5.7.1 התמרת פוריה ועקרון אי הוודאות

מקובל בהנדסה (ובפיזיקה) להגדיר רוחב אפקטיבי בזמן Δt כמדד לפיזור בזמן. הוא מוגדר על ידי

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 \, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt} \; . \tag{5.7.3}$$

בצורה דומה רוחב הסרט האפקטיבי בתדר $\Delta\omega$ על ידי

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega} \; . \tag{5.7.4}$$

נשים לב כי הנירמול (המכנה) מביא לכך שהפיזור אינו תלוי בהגבר: אם נכפיל את האות בקבוע כלשהו α רוחב הסרט האפקטיבי לא ישתנה.

לעיתים מגדירים את הפיזור ביחס לממוצע, למשל נגדיר את ההמוצע בזמן על ידי

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, dt \; . \tag{5.7.5}$$

רוחב הסרט האפקטיבי בזמן מוגדר כעת על ידי

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t) - \overline{x}|^2 \, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt} \; . \tag{5.7.6}$$

בצורה דומה ניתן להגדיר רוחב סרט בתדר ביחס לממוצע. כיוון שהדבר מסובך יותר מבחינה מתמטית, אנו נתעלם מהממוצע ונשאר עם ההגדרה המקורית.

משפט 5.7.1 אם האות $x \in L_2$ מקיים את התנאי הטכני

$$\lim_{|t| \to \infty} \left[\sqrt{t} \, x(t) \right] = 0 \tag{5.7.7}$$

אזי $\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 1/2$ ושוויון מושג עבור $x(t) = e^{-\alpha t^2}$.

הוכחה: כפי שהערנו לעיל, התוצאה אינה משתנה אם נכפיל את x בקבוע כלשהו. נעשה זאת אם כן, כך שנקבל $||x||_2 = 1$. לאותות ב-L_2 אי שוויון קושי-שוורץ הוא

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} z(t) y(t) \, dt \right|^2 \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 \, dt \right| \left| \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt \right| \; . \tag{5.7.8}$$

כאשר שוויון יתקיים אם ורק אם $z(t) = \alpha y(t)$ עבור קבוע כלשהו. נשתמש גם במשפט פרסוול והתמרת הנגזרת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega \tag{5.7.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega X(\omega)|^2 \, d\omega \; . \tag{5.7.10}$$

את הקבוע $1/2$ נקבל דרך החישוב הבא, תוך שימוש באינטגרציה בחלקים

$$\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\frac{dx}{dt}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{dx^2(t)}{dt}\,dt \tag{5.7.11}$$

$$= \frac{1}{2}\,tx^2(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \tag{5.7.12}$$

$$= -\frac{1}{2} \tag{5.7.13}$$

כיוון שהביטוי הראשון מתאפס בשני הגבולות בגלל ההנחה על x והאנטגרל הוא הנורמה של x שהיא 1.
כעת נשתמש בחישוב הקודם ונפעיל את אי שוויון קושי שוורץ כאשר $z(t) = tx(t)$ ו-$y(t) = dx(t)/dt$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\frac{dx}{dt}\,dt\right|^2 \tag{5.7.14}$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{dx}{dt}\right|^2\,dt \tag{5.7.15}$$

ומפרסוול נקבל את שני השיוויונים הבאים

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t)|^2\,dt\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega X(\omega)|^2\,dt \tag{5.7.16}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2|x(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt}\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\omega X(\omega)|^2\,dt}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,dt} \tag{5.7.17}$$

$$= (\Delta t)^2(\Delta\omega)^2\,. \tag{5.7.18}$$

שוויון מתקיים כאשר

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha t x(t) \tag{5.7.19}$$

או

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\ln[x(t)]}{dt} \tag{5.7.20}$$

$$= \alpha t \tag{5.7.21}$$

$$x(t) = ce^{-\alpha t^2/2}\,. \tag{5.7.22}$$

מ.ש.ל.

5.7.2 משפטי חלקות

משפט 5.7.2 אם x ונגזרותיו עד סדר n קיימים וחסומים, כלומר קיים מספר B כך ש-

$$\sup_t\left|\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right| \le B,\quad 0\le k\le n \tag{5.7.23}$$

אזי התמרת פוריה שואפת לאפס כאשר $|\omega|\to\infty$ לפחות בקצב $|\omega|^{-(n+1)}$, כלומר קיים חסם B_1 כך ש-

$$\lim_{|\omega|\to\infty}|\omega^{n+1}X(\omega)| \le B_1\,. \tag{5.7.24}$$

פרק 6

התמרת לפלס

בסעיף 5.1 ראינו כי אות אקספוננציאלי הוא "אות עצמי" של מערכות לנאריות. עד כה השתמשנו בעובדה זו לניתוח בתחום התדר. הדבר מתאים לאותות דועכים---וכבר בפונקצית מדרגה הטיפול במישור התדר בעייתי, ונאלצנו להשתמש באותות מוכללים. התמרת לפלס Laplace transform נותנת כלי חשוב לטיפול פשוט יותר במשפחה רחבה של אותות. בפרט, התמרת לפלס חד צדדית (שהיא ההתמרה אותה לומדים בקורס "טורי פוריה והתמרות אינטגרליות") נותנת כלי לטיפול במשוואות דיפרנציאליות רגילות, כולל התחשבות בתנאי התחלה. נעסוק תחילה בהתמרה הדו-צדדית.

6.1 התמרת לפלס דו צדדית

התמרת לפלס דו צדדית משמשת כלי חשוב לניתוח מערכות כניסה-יציאה לינאריות וקבועות בזמן.

הגדרה 6.1.1 התמרת לפלס דו-צדדית של אות x מוגדרת עבור ערכים של המשתנה המרוכב s עבורם

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-(\Re e\, s)t}\, dt < \infty\,. \tag{6.1.1}$$

ואז ההתמרה היא

$$X(s) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt\,. \tag{6.1.2}$$

תחום ההגדרה, או תחום ההתכנסות (*ROC: Region Of Converngence*) הוא אוסף הערכים של s עבורם ההתמרה מוגדרת, כלומר עבורם מתקיים אי השוויון (6.1.1). נסמן את הקשר בין x להתמרה X כך:

$$x \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X\,, \quad X(s) = \mathcal{L}[x](s)\,. \tag{6.1.3}$$

דוגמה 6.1.2 ראשית נשים לב כי לאות $x(t) \equiv 3$ אין התמרת לפלס דו צדדית, שכן תחום ההתכנסות אינו כולל שום s. נחשב אם כן התמרה של האות הימני

$$x(t) = e^{at} u(t) \tag{6.1.4}$$

כאשר u היא פונקצית המדרגה. עבור הבחירה $a = 0$ האות x הוא פונקצית המדרגה.

$$X(s) = \mathcal{L}[x](s) \tag{6.1.5}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(t) e^{-st}\, dt \tag{6.1.6}$$

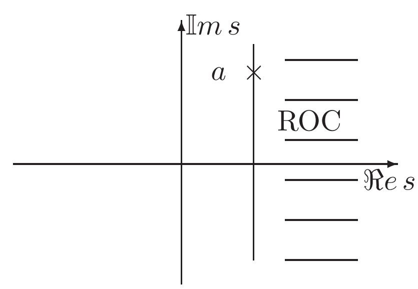
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt\,. \tag{6.1.7}$$

אינטגרל זה מתכנס אם ורק אם $\Re e\,(s-a) > 0$, ולכן זהו תחום ההתכנסות של התמרה. בתחום זה

$$X(s) = \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} \tag{6.1.8}$$

$$= \frac{1}{s-a}\,. \tag{6.1.9}$$

קיבלנו ש-$1/(s-a) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} e^{at}u(t)$ עם תחום התכנסות $\Re e\, s > \Re e\, a$. בפרט, $1/s \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} u(t)$ עם תחום התכנסות $\Re e\, s > 0$. נשים לב כי בתחום ההתכנסות איננו כוללים את הגבול $\Re e\, s = 0$; כך מוגדר התחום באופן כללי.



איור 6.1: תחום התכנסות לאות אספוננציאלי ימני

נחשב כעת התמרה של אות אחר:

דוגמה 6.1.3 כעת נבחר אות שמאלי

$$x(t) = -e^{at} u(-t)\,. \tag{6.1.10}$$

לפי ההגדרה

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(-t) e^{-st}\, dt \tag{6.1.11}$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}\, dt\,. \tag{6.1.12}$$

במקרה זה t מקבל ערכים שליליים בלבד. לכן האינטגרל יתכנס אם ורק אם $\Re e\,(a-s) > 0$. בתחום זה של ערכי s

$$X(s) = \frac{-1}{(a-s)} e^{(a-s)t}\Big|_{t=-\infty}^{0} \tag{6.1.13}$$

$$= \frac{1}{s-a}\,. \tag{6.1.14}$$

תחום הקיום של התמרה זו הוא $\Re e\,(s) < \Re e\,(a)$.

החישוב בשתי הדוגמאות לעיל נותן כי התמרת לפלס בשני המקרים היא הפונקציה $X(s) = 1/(s-a)$, וזאת למרות שהאותות שונים לחלוטין. אכן, כדי לשמור על קשר יחיד בין אות להתמרתו עלינו לכלול מידע על תחום ההתכנסות.

דוגמה 6.1.4 נחשב התמרה עבור האות הדו צדדי

$$x(t) = e^{at}u(t) + e^{bt}u(-t) \tag{6.1.15}$$

כאשר a ו-b ממשיים. חישוב כמו בדוגמאות הקודמות מביא למסקנה כי

$$X(s) = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\,, \tag{6.1.16}$$

$$ROC = \{\Re e\,(s) > a\} \cap \{\Re e\,(s) < b\}\,. \tag{6.1.17}$$

לכן ההתמרה קיימת אם ורק אם $a < b$. אם תנאי זה מתקיים אזי תחום הקיום הוא $a < \Re e\,(s) < b$, כלומר רצועה אנכית במישור המרוכב. אם התנאי אינו מתקיים אזי אין התמרת לפלס לאות זה.

הגדרה 6.1.5 פונקציה X נקראת רציונלית אם היא מנה של שני פולינומים

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{6.1.18}$$

מצומצמים (כלומר ללא גורם משותף). אפסי $X(s)$ הם האפסים של $N(s)$, והקטבים של $X(s)$ הם האפסים של $D(s)$.

משפט 6.1.6 לתחום ההתכנסות יש את התכונות הבאות.

1. גבול תחום ההתכנסות הוא קווים מקבילים לציר $j\omega$.
2. אם

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{6.1.19}$$

היא פונקציה רציונלית אזי

- ה-ROC אינו כולל קטבים של $X(s)$
- לפונקציות ימניות ה-ROC הוא מהקוטב הימני ביותר וימינה,
- לפונקציות שמאליות ה-ROC הוא מהקוטב השמאלי ביותר ושמאלה,
- לפונקציות דו צדדיות ה-ROC הוא חיתוך של שני חצאי מישור ולכן הוא תמיד פס---או רצועה---במישור המרוכב.

3. אם $x(t)$ הוא בעל תמך סופי, כלומר קיים B כך ש-$x(t) = 0$ עבור $|t| > B$, אזי תחום ההגדרה הוא כל או אף s.
4. לפונקציות ימניות תחום ההגדרה הוא חצי מישור ימני. לפונקציה שמאלית---חצי מישור שמאלי.

הוכחה: לפי הגדרת תחום ההתכנסות, הוא אינו תלוי בחלק המדומה של s.
נניח ש-s_1 וגם s_2 הם בתחום ההתכנסות, ובגלל הסעיף הקודם נוכל להניח ששניהם ממשיים. נניח $s_1 < s_2$.
נראה כי אם $s_1 < s < s_2$ אזי גם s הוא בתחום ההתכנסות. ואכן, לכל t,

$$e^{-st} < e^{-s_1 t} + e^{-s_2 t} \,. \tag{6.1.20}$$

מכאן נובע כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| s^{-st}\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| s^{-s_1 t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| s^{-s_2 t}\, dt < \infty \tag{6.1.21}$$

ולכן s הוא בתחום ההתכנסות. כלומר תחום ההתכנסות הוא קשיר (כלומר הוא תחום רצוף). מאי השוויון השמאלי ב-(6.1.21) נובע שלא יתכן קוטב בתחום ההתכנסות, שכן קרוב לקוטב הגודל של $X(s)$ אינו חסום.
כיוון שעבור $t \geq 0$ מתקיים $s_1 < s_2$

$$e^{-s_1 t} \geq e^{-s_2 t} \,, \tag{6.1.22}$$

נובע כי

$$\int_{0}^{\infty} |x(t)| s^{-s_1 t}\, dt > \int_{0}^{\infty} |x(t)| s^{-s_2 t}\, dt \tag{6.1.23}$$

ולכן תחום ההתכנסות לאות ימני הוא חצי מישור. לפי הגדרת הקוטב, הגבול השמאלי של תחום ההתכנסות הוא הקוטב הראשון---כלומר הקוטב הימני ביותר. בצורה דומה נראה כי תחום ההתכנסות לאות שמאלי הוא מהקוטב השמאלי ושמאלה.
באותה צורה נסיק מ-(6.1.21) שתחום ההתכנסות הוא באופן כללי רצועה. לאות רציונלי הרצועה תהיה בין זוג קטבים.
נניח של-$x(t)$ תמך סופי המוכל בתחום $[-B, B]$. נקבע s_0 כלשהוא הנמצא בתחום ההתכנסות ונחשב את התנאי ש-$s \neq s_0$ נמצא בתחום ההתכנסות.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-st}\, dt = \int_{-B}^{B} |x(t)| e^{-st}\, dt \tag{6.1.24}$$

$$= \int_{-B}^{B} |x(t)| e^{-s_0 t} e^{(s_0 - s)t}\, dt \tag{6.1.25}$$

$$\leq \int_{-B}^{B} |x(t)| e^{-s_0 t}\, dt \left[e^{(s_0 - s)B} + e^{-(s_0 - s)B} \right] . \tag{6.1.26}$$

מכיוון שהביטוי האחרון בסוגריים מרובעות הוא תמיד סופי, נובע שאם s_0 בתחום ההתכנסות אזי כך גם s. כיוון שתוצאה זו נכונה לכל s_0 קיבלנו שתחום ההתכנסות הוא כל s או אף s. מ.ש.ל.

תרגיל 6.1.7 נניח כי הקבועים המרוכבים a, b, c מקיימים $\Re e\, a > \Re e\, b > \Re e\, c$. נסמן ב-$u_i$ פונקציה שהיא מדרגה ($u(t)$ או $u(-t)$). חשב את התמרת לפלס ושרטט את תחום ההתכנסות של

$$x(t) = e^{at} u_1(t) + e^{bt} u_2(t) + e^{ct} u_3(t) \tag{6.1.27}$$

עבור המקרים השונים.

משפט 6.1.8 ההתמרה היא פעולה לינארית, כלומר

$$\alpha x + \beta y \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \alpha X + \beta Y \tag{6.1.28}$$

ותחום הקיום מכיל לפחות את $ROC_x \cap ROC_y$.

הוכחה: נובע מיידית מלינאריות האינטגרל. מ.ש.ל.

חשוב להדגיש כי תחום הקיום יכול להיות גדול יותר. לדוגמה נבחר $x = y$ כלשהם ו-$\alpha = 1 = -\beta$. אזי $\alpha x + \beta y = 0$ ולאות זה יש התמרה לכל s.

משפט 6.1.9 $x * y \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)Y(s)$. תחום ההתכנסות מכיל לפחות את $ROC_x \cap ROC_y$.

הוכחה: לפי הגדרת ההתמרה והקונוולוציה,

$$\mathcal{L}(x*y)(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-st}\,dt \tag{6.1.29}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]d\tau \tag{6.1.30}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\,dt\right]e^{-s\tau}\,d\tau \tag{6.1.31}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-su}\,du\right]d\tau \tag{6.1.32}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\,Y(s) \tag{6.1.33}$$

$$= X(s)Y(s)\,. \tag{6.1.34}$$

החישוב תקף כמובן אם s נמצא בתחום ההתכנסות של שתי ההתמרות. מ.ש.ל.

גם כאן תחום ההתכנסות יכול להיות גדול יותר.

התמרת לפלס של דלתה מוזזת היא

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-sa}\,. \tag{6.1.35}$$

נזכר כי ניתן לייצג השהיה דרך קונוולוציה עם דלתה מוזזת.

משפט 6.1.10 $x(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} e^{-sa}X(s)$ ותחום ההתכנסות הוא כמו של X.

הוכחה:

$$\mathcal{L}[x(t-a)](s) = \mathcal{L}[(x(t)*\delta(t-a)](s) = X(s)e^{-sa}\,. \tag{6.1.36}$$

באשר לתחום ההתכנסות, הוא ללא שינוי בגלל המשפט הקודם שכן תחום ההתכנסות של δ הוא כל s. מ.ש.ל.

דוגמה 6.1.11 נחשב התמרה של פולס מרובע ברוחב T:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{6.1.37}$$

ניתן ליצג את האות על ידי $x(t)=u(t)-u(t-T)$. לפי ההגדרה של ההתמרה

$$\mathcal{L}[x](s)=\mathcal{L}[u(t)-u(t-T)](s) \tag{6.1.38}$$
$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT} \tag{6.1.39}$$
$$=\frac{1}{s}\left(1-e^{-sT}\right)\,. \tag{6.1.40}$$

ההתמרה של אות המוכפל באקספוננט היא

$$\mathcal{L}[e^{at}x(t)](s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{at}e^{-st}\,dt \tag{6.1.41}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-(s-a)t}\,dt \tag{6.1.42}$$
$$=X(s-a)\,, \tag{6.1.43}$$

ותחום ההתכנסות מוגדר דרך $s-a\in ROC_x$.

משפט 6.1.12 אם $\lim_{|t|\to\infty}x(t)e^{-st}=0$ עבור s בתחום ההתכנסות אזי

$$\frac{dx}{dt}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}sX(s)\,. \tag{6.1.44}$$

באופן כללי יותר, אם $\lim_{|t|\to\infty}x^{(k)}(t)e^{-st}=0$ לכל $0\le k<n$ אזי

$$\frac{d^nx}{dt^n}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}s^nX(s)\,. \tag{6.1.45}$$

תחום ההתכנסות כולל את כל הנקודות s שבתחום ההתכנסות של x ואשר מקיימות את התנאי לעיל (על השאיפה של x ונגזרותיו לאפס).

ב הוכחה: אינטגרציה בחלקים:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\dot{x}(t)\,dt \tag{6.1.46}$$
$$=x(t)e^{-st}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}se^{-st}x(t)\,dt \tag{6.1.47}$$
$$=0+sX(s) \tag{6.1.48}$$

בגלל ההנחה. בצורה דומה נקבל את הביטוי השני. מ.ש.ל.

משפט 6.1.13 התמרה של אינטגרל לא מסויים:

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{X(s)}{s} \tag{6.1.49}$$

ותחום ההתכנסות הוא

$$ROC_x\cap\{\Re e\,(s)>0\}\,. \tag{6.1.50}$$

הוכחה: כפי שעשינו עבור התמרת פוריה

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right](s) = \mathcal{L}[x * u](s) \tag{6.1.51}$$

$$= X(s)\frac{1}{s}\,. \tag{6.1.52}$$

מ.ש.ל.

משפט 6.1.14 גזירה במשתנה s:

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{d}{ds}X(s)\,. \tag{6.1.53}$$

הוכחה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -tx(t)e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds}x(t)e^{-st}\, dt \tag{6.1.54}$$

$$= \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt \tag{6.1.55}$$

$$= \frac{d}{ds}X(s)\,. \tag{6.1.56}$$

מ.ש.ל.

דוגמה 6.1.15 נחשב את ההתמרה של $te^{at}u(t)$.

$$\mathcal{L}\left[te^{at}u(t)\right] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-a}\right] \tag{6.1.57}$$

$$= \frac{1}{(s-a)^2}\ , \Re e\,(s) > a\,. \tag{6.1.58}$$

בצורה דומה נקבל

$$t^k e^{at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{k!}{(s-a)^{k+1}} \quad \Re e\,(s) > a\,, \tag{6.1.59}$$

$$t^k e^{at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{-k!}{(s-a)^{k+1}} \quad \Re e\,(s) < a\,. \tag{6.1.60}$$

משפט 6.1.16 שינוי סקלה: עבור α ממשי

$$x(\alpha t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad \frac{s}{\alpha} \in ROC_x\,. \tag{6.1.61}$$

הוכחה:

$$X\left(\frac{s}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\frac{s}{\alpha}t}\,dt \tag{6.1.62}$$
$$= |\alpha|\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha\tau)e^{-s\tau}\,d\tau \tag{6.1.63}$$
$$= |\alpha|\mathcal{L}[x(\alpha t)](s)\,. \tag{6.1.64}$$

מ.ש.ל.

6.2 התמרה הפוכה

כמו בתאוריה של התמרת פוריה, יש קשר חד חד ערכי בין האות לבין ההתמרה (כולל מידע על תחום ההתכנסות). לכן בדרך כלל נוכל להשתמש במידע קיים (טבלאות, פיתוחים קודמים) על מנת לשחזר את האות מתוך התמרת לפלס ותחום ההתכנסות שלה. אך בסעיף זה נראה כיצד לחשב את ההתמרה ההפוכה במספר דרכים.

6.2.1 נוסחת התמרה הפוכה

נניח שלאות $x(t)$ יש התמרת לפלס $X(s)$. נסמן את המשתנה המרוכב $s=\sigma+j\omega$ כסכום של חלקו הממשי וחלקו המדומה. לפי ההגדרה של ההתמרה (6.1.1) עבור σ בתחום ההתכנסות,

$$X(\sigma+j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt\,. \tag{6.2.1}$$

זוהי בדיוק התמרת פוריה של $e^{-(\sigma t)}x(t)$. נשים לב כי $e^{-(\sigma t)}x(t)$ הוא אות ב-L_1 משום ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-(\sigma t)}x(t)\right|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\Re e\,(st)}\,dt < \infty \tag{6.2.2}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מהעובדה כי ל-x יש התמרת לפלס. אם כך (בתנאים טכניים מתאימים) ניתן להשתמש בנוסחת התמרת פוריה ההפוכה, בצורה הבאה. נקבע ערך כלשהו של σ בתחום ההתכנסות של התמרת לפלס ונחשב

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{\sigma t}e^{j\omega t}\,jd\omega \tag{6.2.3}$$
$$= e^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$
$$= e^{\sigma t}\mathcal{F}^{-1}[X(\sigma+j\omega](t) \tag{6.2.4}$$

כאשר בהתמרה ההפוכה σ הוא קבוע. אבל

$$X(\sigma+j\omega) = \mathcal{F}[e^{-\sigma t}x(t)] \tag{6.2.5}$$

ולכן

$$e^{-\sigma t}x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(\sigma+j\omega)] \tag{6.2.6}$$

$$x(t)=e^{\sigma t}\mathcal{F}^{-1}[X(\sigma+j\omega)] \tag{6.2.7}$$

$$=e^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\,. \tag{6.2.8}$$

השיווין האחרון נותן לנו נוסחה להתמרה הפוכה, כאשר את σ עלינו לבחור כך שתהיה בתחום ההתכנסות. משוויון זה ומשוואות (6.2.3)--(6.2.4) נקבל את נוסחת ההתמרה ההפוכה

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}\,ds} \tag{6.2.9}$$

כאשר, כפי שראינו בפרק אודות התמרת פוריה, השוויון מתקיים בנקודות רציפות, ותחת תנאים מתאימים.

על מנת להשתמש בנוסחה זו יש לודא שאכן ניתן להפעיל את נוסחת האינטגרל עבור התמרת פוריה ההפוכה.

6.2.2 פיתוח לשברים חלקיים

במקרים רבים ההתמרה היא פונקציה רציונלית, כלומר מהצורה

$$X(s)=\frac{b_Ms^M+b_{M-1}s^{M-1}+\ldots+b_1s+b_0}{s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\ldots+a_1s+a_0}\,. \tag{6.2.10}$$

אם $M\geq N$ אפשר לרשום משוואה זו בצורה

(6.2.11)

$$X(s)=C_{M-N}s^{M-N}+C_{M-N-1}s^{M-N-1}+\ldots+C_1s+C_0+\frac{\tilde{b}_{N-1}s^{N-1}+\tilde{b}_{N-2}s^{N-2}+\ldots+\tilde{b}_1s+\tilde{b}_0}{s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\ldots+a_1s+a_0}\,.$$

כעת נוכל להשתמש בלינאריות של ההתמרה (ולכן גם של ההתמרה ההפוכה). נפרק את השבר לגורמים מהצורה

$$\frac{Cs^l}{(s-\lambda_i)^k} \tag{6.2.12}$$

(כאשר ה-λ_i הם אפסי המכנה, או הקטבים של X) ונשתמש בעובדות הבאות.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-\lambda_i)^k}\right)=\begin{cases}\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\lambda_i t}u(t) & \text{אות ימני}\\ \frac{-1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\lambda_i t}u(-t) & \text{אות שמאלי}\end{cases} \tag{6.2.13}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(1\right)=\delta(t)\,. \tag{6.2.14}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(sZ(s)\right)=\frac{d}{dt}z(t)\,. \tag{6.2.15}$$

בשיטה זו נוכל למצוא את ההתמרה ההפוכה של כל פונקציה רציונלית.

דוגמה 6.2.1 נפרק לשברים חלקיים על ידי השוואת מקדמים; נרשום

$$\frac{s^2+as+b}{(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)} = \frac{c_1}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{c_2}{(s-\lambda_1)} + \frac{c_3}{s-\lambda_2}\,. \tag{6.2.16}$$

את צד ימין נרשום בעזרת מכנה משותף $(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)$ ונקבל

$$\frac{s^2+as+b}{(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)} = \frac{c_1(s-\lambda_2)+c_2(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)+c_3(s-\lambda_1)^2}{(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)} \tag{6.2.17}$$

ומכאן על ידי השוואת מקדמים נקבל את הערכים; זאת בשיטה הבאה. נכפיל את שני האגפים ב-$(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)$ ונקבל

$$s^2+as+b = c_1(s-\lambda_2)+c_2(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)+c_3(s-\lambda_1)^2\,. \tag{6.2.18}$$

כעת אם נציב $s=\lambda_1$ נקבל

$$\lambda_1^2+a\lambda_1+b = c_1(\lambda_1-\lambda_2) \tag{6.2.19}$$

כיוון ששני האברים האחרונים מתאפסים. מכאן נקבל את c_1

$$c_1 = \frac{\lambda_1^2+a\lambda_1+b}{\lambda_1-\lambda_2}\,. \tag{6.2.20}$$

כעת נציב $s=\lambda_2$ ב-(6.2.18) ונקבל

$$\lambda_2^2+a\lambda_2+b = c_3(\lambda_2-\lambda_1)^2 \tag{6.2.21}$$

כיוון שכעת שני האברים הראשונים מתאפסים. לכן

$$c_3 = \frac{\lambda_2^2+a\lambda_2+b}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\,. \tag{6.2.22}$$

החישוב של c_2 מורכב מעט יותר. אפשר כמובן להשתמש בערכים שחישבנו, להציב ב-(6.2.18) ולקבל את הערך החסר. שיטה יותר כללית מתחילה שוב ב-(6.2.18), אך במקום להציב נגזור את המשוואה לפי s:

$$\frac{d}{ds}[s^2+as+b] = \frac{d}{ds}[c_1(s-\lambda_2)+c_2(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)+c_3(s-\lambda_1)^2] \tag{6.2.23}$$

$$2s+a = c_1+c_2(s-\lambda_2+s-\lambda_1)+2c_3(s-\lambda_1) \tag{6.2.24}$$

כעת נציב $s=\lambda_1$ ונקבל

$$2\lambda_1+a = c_1+c_2(\lambda_1-\lambda_2) \tag{6.2.25}$$

כיוון ששאר האברים מתאפסים. לכן

$$c_2 = \frac{2\lambda_1+a-c_1}{\lambda_1-\lambda_2}\,. \tag{6.2.26}$$

בצורה שקולה, ניתן להשוות מקדמים ב-(6.2.18) ונקבל

$$c_3 + c_2 = 1 \tag{6.2.27}$$

$$-c_3 2\lambda_1 - c_2(\lambda_1 + \lambda_2) + c_1 = a \tag{6.2.28}$$

$$c_3\lambda_1^2 + c_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 c_1 = b\,. \tag{6.2.29}$$

ממערכת משוואות לינארית זו נחלץ את הקבועים c_1, c_2, c_3.

קיבלנו פירוק לשברים חלקיים. מכאן נשתמש במידע על תחום ההתכנסות ובטבלה כדי לקבל את ההתמרה ההפוכה.

ניתן גם לפרק בצורה השקולה

$$\frac{s^2 + as + b}{(s-\lambda_1)^2(s-\lambda_2)} = \frac{d_1 s + d_2}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{3_2}{(s-\lambda_2)}\,. \tag{6.2.30}$$

שתי הצורות יופיעו בתירגולים.

באופן כללי ניתן לבצע פירוק לשברים חלקיים בשיטה הבאה. ראשית, כמו בתחילת סעיף זה, יש לבצע חילוק כמו ב-(6.2.11) כדי לבודד חלק של הפונקציה בו דרגת המונה אינה גדולה מדרגת המכנה. בשלב שני יש להביא את הפונקציה הרציונלית לצורה סטנדרטית, ולהשתמש במשפט הבא.

משפט 6.2.2 פירוק לשברים חלקיים. נתונה פונקציה רציונלית בצורה

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{(s-\lambda_1)^{k_1}\cdot(s-\lambda_2^{k_2})\cdots(s-\lambda_p)^{k_p}} \tag{6.2.31}$$

כך שדרגת המונה אינה גדולה מדרגת המכנה (כלומר $M \le k_1 + \ldots + k_p$, λ_n הם שרשי המכנה, ו-$k_n \ge 1$ הוא הריבוי של השורש λ_n). ניתן לרשום את $X(s)$ בצורה הבאה:

$$X(s) = \sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{k_n}\frac{A_{nk}}{(s-\lambda_n)^k} \tag{6.2.32}$$

כאשר המקדמים A_{nk} נתונים על ידי

$$A_{nk} = \frac{1}{(k_n-k)!}\left[\frac{d^{k_n-k}}{ds^{k_n-k}}\left[(s-\lambda_n)^{k_n}X(s)\right]\right]_{s=\lambda_n}\,. \tag{6.2.33}$$

לעיתים ניתן לייצג התמרות מורכבות בעזרת פונקציות רציונליות, ואז שוב להשתמש בתכונות ידועות. לדוגמה

דוגמה 6.2.3 נחשב התמרה הפוכה ל-

$$X(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \tag{6.2.34}$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא $\Re e\, s > 0$ ו-$T > 0$. בתחום זה מתקיים $|e^{-sT}| < 1$. לכן אפשר לייצג את $X(s)$ בעזרת פיתוח לטור הנדסי:

$$\frac{1}{1-e^{-sT}} = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots \tag{6.2.35}$$

בגלל הלינאריות נבצע התמרה הפוכה איבר איבר ונקבל

$$x(t)=\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\,. \tag{6.2.36}$$

אות זה נקרא "רכבת הלמים".

6.3 לפלס ומערכות

בסעיף זה נדון בשימושי התמרת לפלס דו צדדית לניתוח מערכות.

בסעיף 5.1 ראינו כי אם נכניס אות אקספוננציאלי $x(t)=e^{st}$ למערכת המתוארת על ידי מד"ר, אזי התגובה תהיה $H(s)e^{st}$, ואף קיבלנו ביטוי עבור H. נראה כעת דרך שונה להגיע ל-H, אשר תשפוך אור חדש על מהות פונקציה זו. נניח אם כן כי x הוא אות כניסה למערכת המתוארת על ידי מד"ר

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}=\sum_{m=0}^{M}b_m\frac{d^mx(t)}{dt^m} \tag{6.3.1}$$

אשר המוצא הוא y. נבצע התמרת לפלס לשני צידי המשוואה, ונשתמש בעובדה כי

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x\right](s)=s^nX(s) \tag{6.3.2}$$

ונקבל

$$\sum_{n=0}^{N}a_ns^nY(s)=\sum_{m=0}^{M}b_ms^mX(s) \tag{6.3.3}$$

$$Y(s)\sum_{n=0}^{N}a_ns^n=X(s)\sum_{m=0}^{M}b_ms^m \tag{6.3.4}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_ms^m}{\sum_{n=0}^{N}a_ns^n}\,. \tag{6.3.5}$$

הביטוי $H(s)=Y(s)/X(s)$ נקרא פונקציית התמסורת של המערכת: הוא מתאר את הקשר בין כניסה ויציאה במישור לפלס. בפרט, כיוון ש-$\mathcal{L}(\delta)=1$, הביטוי $H(s)$ הוא התמרת לפלס של התגובה להלם של המערכת.

משפט 6.3.1 מערכת המתוארת על ידי מד"ר היא יציבה *BIBO* אם ורק אם $N\leq M$ ובנוסף כל קטבי פונקצית התמסורת הם בעלי חלק ממשי שלילי ממש.

מערכת המתוארת על ידי פונקצית תמסורת רציונלית היא יציבה *BIBO* אם ורק אם סדר המונה אינו גדול מסדר המכנה ובנוסף כל קטבי פונקצית התמסורת הם בעלי חלק ממשי שלילי ממש.

חשוב לשים לב כי אם יש צימצום בין מונה ומכנה, הגורם שהצטמצם אינו קוטב של המערכת, שכן בהגדרה קוטב הוא ערך של s אשר סביבו הפונקציה אינה חסומה. אם יש צימצום אזי הפונקציה תהיה רציפה שם.

הוכחה: נזכר בפירוק (6.2.11). אם $M > N$ אזי תגובת ההלם כוללת נגזרות של דלתה, וכבר ראינו כי זו אינה מערכת יציבה. נניח אם כן ש-$M \le N$. נזכר כי מערכת היא יציבה BIBO אם ורק אם תגובת ההלם היא אינטגרבילית. אבל כאן $H(s)$ היא רציונלית, ולכן על ידי פירוק לשברים חלקיים נקבל כי תגובת ההלם היא סכום של אותות מהצורה

$$Ct^k e^{\lambda_i t} u(t)\,. \tag{6.3.6}$$

החזקות λ_i הן הקטבים של H. לכן תגובת ההלם אינטגרבילית אם ורק אם כל האקספוננטים דועכים כאשר $t \to \infty$, וזה יקרה בדיוק כאשר $\Re e\, \lambda_i < 0$. הוכחת החלק השני זהה. מ.ש.ל.

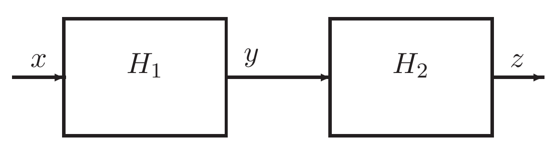
6.3.1 לפלס וחיבור מערכות

התמרת לפלס נותנת לנו כלי נוח לנתח חיבורים של מערכות. כיוון שהקשר בין כניסה ויציאה הוא אלגברי

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{6.3.7}$$

קל יחסית לנתח גם חיבורים מורכבים.

דוגמה 6.3.2 חיבור מערכות בטור מתואר על ידי השרטוט המצורף.



איור 6.2: חיבור מערכות בטור

נקבל מייד כי

$$Z(s) = H_2(s)Y(s) \tag{6.3.8}$$

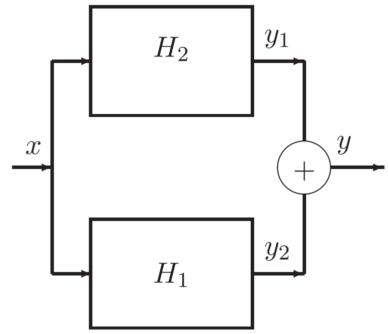
$$= H_2(s)H_1(s)X(s) \tag{6.3.9}$$

ולכן פונקצית התמסורת של המערכת הכוללת היא

$$H(s) = H_2(s)H_1(s)\,. \tag{6.3.10}$$

בפרט, נובע ממשפט *6.3.1* כי המערכת הכוללת H יציבה *BIBO* אם ורק אם סכום סדר המונים של H_1 ו-H_2 קטן מסכום סדר המכנים, ואותם קטבים אשר אינם מצטמצמים עם אברי אחד המונים מקיימים $\Re e\,(s_i) < 0$. ברור אם כך כי בהחלט יתכן כי אחת מהמערכות אינה יציבה (אם בגלל סדר המונה ואם בגלל מיקום קטבים), אולם המערכת הכוללת יציבה.

דוגמה 6.3.3 חיבור מערכות במקביל מתואר על ידי השרטוט המצורף.



איור 6.3: חיבור מערכות במקביל

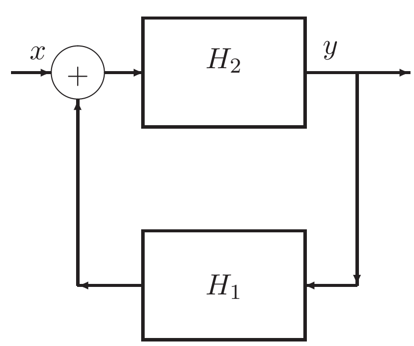
נחשב את פונקצית התמסורת הכוללת.

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \tag{6.3.11}$$
$$= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \tag{6.3.12}$$
$$= (H_1(s) + H_2(s))X(s) \tag{6.3.13}$$

ולכן פונקצית התמסורת של המערכת הכוללת היא $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$.

לבסוף, ננתח מערכת אשר עד כה לא יכולנו לתאר כראוי.

דוגמה 6.3.4 מערכת משוב מתוארת על ידי השרטוט המצורף.



איור 6.4: חיבור משוב

בפרט, המקרה החשוב ביותר הוא משוב יחידה שלילי, שעבורו $H_1(s) = -1$. פונקצית התמסורת הכוללת מחושבת כך

$$Y(s) = H_2(s)[X(s) + H_1(s)Y(s)] \tag{6.3.14}$$
$$= H_2(s)X(s) + H_2(s)H_1(s)Y(s) \tag{6.3.15}$$
$$Y(s)[1 - H_2(s)H_1(s)] = H_2(s)X(s) \tag{6.3.16}$$
$$Y(s) = \frac{H_2(s)}{1 - H_2(s)H_1(s)}X(s) \tag{6.3.17}$$

וקבלנו את נוסחת מערכת המשוב; במקרה הכללי

$$H(s) = \frac{H_2(s)}{1 - H_2(s)H_1(s)} \tag{6.3.18}$$

ועבור משוב יחידה שלילי

$$H(s) = \frac{H_2(s)}{1 + H_2(s)}\,. \tag{6.3.19}$$

נניח שפונקציות התמסורת הן רציונליות, כלומר

$$H_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \tag{6.3.20}$$

$$H_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \tag{6.3.21}$$

כאשר $N_i(s), D_i(s)$ הם פולינומים ב-s. אזי

$$H(s) = \frac{H_2(s)}{1 - H_2(s)H_1(s)} \tag{6.3.22}$$

$$= \frac{\frac{N_2(s)}{D_2(s)}}{1 - \frac{N_2(s)}{D_2(s)}\frac{N_1(s)}{D_1(s)}} \tag{6.3.23}$$

נכפיל את המונה והמכנה ב-$D_2(s)D_1(s)$ ונקבל

$$H(s) = \frac{N_2(s)D_1(s)}{D_2(s)D_1(s) - N_2(s)N_1(s)} \tag{6.3.24}$$

ובפרט עבור המקרה של משוב יחידה שלילי נקבל

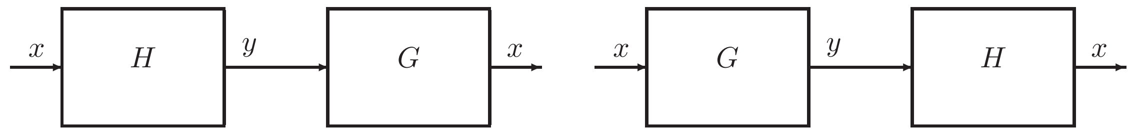
$$H(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s) + N_2(s)}\,. \tag{6.3.25}$$

מביטוי זה ברור כי במערכת משוב (עם רכיבים רציונליים), סדר המונה של המערכת הכוללת תמיד אינו גדול מסדר המכנה, ובכך מתמלא אחד מתנאי היציבות. ברור גם כי ניתן להשפיע בצורה משמעותית על מיקום הקטבים על ידי בחירת משוב $H_1(s)$ מתאים.

במקרים רבים המערכת מתארת השפעה של גורמים שאין לנו שליטה עליהם (דינמיקה של מנוע, הנחתה ועיוותי פאזה של תווך מוליך וכד'). כדי לתקן עיוותים אילו ניתן לבנות מערכת מתאימה. בדרך כלל אנו מעוניינים במערכת הופכית.

הגדרה 6.3.5 בהנתן מערכת H המערכת G תקרא המערכת ההופכית אם מתקיים $GH = HG = I$ כאשר GH מסמן הפעלה של המערכת H על אות הכניסה ולאחר מכן הפעלת G על התוצאה. I היא המערכת אשר יציאתה שווה לכניסה. המערכת ההופכית של H תסומן ב-H^{-1}.

ההגדרה אינה מתייחסת לייצוג המערכת (בפרק זה---על ידי התמרת לפלס), אלא היא כללית לחלוטין. כמובן שאם המערכת מוגדרת דרך פונקצית תמסורת, מכיוון שפונקצית תמסורת מוגדרת רק בתחום ההתכנסות, יש לשים לב האם יש תחום התכנסות משותף לשתי המערכות. זאת כדי שתהיה משמעות לחיבור המערכות.



איור 6.5: מערכת הופכית

לפונקציית תמסורת רציונלית מתקיים

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{\frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{D(s)}{N(s)}\,. \tag{6.3.26}$$

6.4 התמרת לפלס חד צדדית

התמרת לפלס חד צדדית היא ההתמרה המופיעה בקורס "טורי פוריה והתמרות אינטגרליות."

הגדרה 6.4.1 התמרת לפלס חד צדדית של האות x מוגדרת עבור ערכים של s כך ש-

$$\int_{0^-}^{\infty} |x(t)| e^{-(\Re e\, s)t}\, dt < \infty\,. \tag{6.4.1}$$

ואז ההתמרה היא

$$X_+(s) \doteq \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt\,. \tag{6.4.2}$$

תחום ההגדרה (ROC: *region of convergence*) הוא אוסף הערכים של s עבורם ההתמרה מוגדרת. נסמן את הקשר בין x להתמרה X_+ כך:

$$x \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} X_+\,, \quad X_+(s) = \mathcal{L}_+[x](s)\,. \tag{6.4.3}$$

משמעות הגבול התחתון 0^- באינטגרל היא שאנו כוללים קטע---קטן באופן שרירותי---משמאל ל-0. זאת על מנת לכלול השפעה של פונקציות מוכללות כגון דלתה. תנאי התחלה אם יש יקבעו עבור זמן 0, וכניסה של אות כלשהו סביב אפס מוגדרת היטב. ניתן להגדיר התמרה המתחילה ב-0^+, אולם אנו לא נעשה זאת. עבור אותות רגילים (לא מוכללים), ברור ש-

$$\mathcal{L}_+ x = \mathcal{L}[x \cdot u]\,. \tag{6.4.4}$$

מכיוון שכך, לפי תכונות התמרת לפלס (דו צדדית), תחום ההתכנסות של ההתמרה החד צדדית הוא תמיד ימני, כלומר $\Re e\, s > \sigma_0$. מכאן נובעת תכונה חשובה:
לכל שתי התמרות (חד צדדיות) יש תחום התכנסות משותף.

מסיבה זו לא נעסוק במשפטים הבאים בשאלה מהו תחום ההתכנסות של האות המתקבל.

כמובן שהקשר בין אות והתמרתו הוא חד חד ערכי רק עבור אותות ימניים (המתאפסים משמאל לאפס): ההתמרה אינה שומרת כל מידע לגבי ערכי האות עבור זמנים שליליים.

חלק גדול מתכונות ההתמרה החד צדדית אפשר לקבל מתכונות ההתמרה הדו צדדית.

משפט 6.4.2 ההתמרה היא פעולה לינארית, כלומר

$$\alpha x + \beta y \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} \alpha X + \beta Y \tag{6.4.5}$$

עבור אותות ימניים x, y,

$$x * y \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} X_+(s)Y_+(s)\,. \tag{6.4.6}$$

עבור אותות שאינם בהכרח ימניים מתקיים

$$(x \cdot u) * (y \cdot u) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} X_+(s)Y_+(s)\,. \tag{6.4.7}$$

הוכחה: התכונות נובעות מאילו של ההתמרה הדו צדדית. מ.ש.ל.

התמרת לפלס חד צדדית של דלתה מוזזת היא

$$\mathcal{L}_+[\delta(t-a)](s) = \int_{0^-} e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-sa} \tag{6.4.8}$$

אם $a \geq 0$ ושווה 0 אם $a < 0$. נזכר כי ניתן לייצג השהיה דרך קונוולוציה עם דלתה מוזזת.

משפט 6.4.3 עבור $a \geq 0$ ואות ימני x,

$$x(t-a) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} e^{-sa}X_+(s)\,. \tag{6.4.9}$$

עבור אות שאינו ימני הקשר ישמר אם נחליף את $x(t-a)$ בחלקו הימיני $x(t-a)u(t-a)$.

הוכחה: נובע מתכונות ההתמרה הדו צדדית. מ.ש.ל.

נשים לב כי אם x איננו אות חד צדדי, לא ניתן לשחזר את ערכיו עבור t שלילי מתוך $X_+(s)$. לכן תכונת ההזזה יכולה להיות תקיפה רק עבור $a \geq 0$ ועבור אות ימני.

מתכונות ההתמרה הדו צדדית נובע מייד כי לכל s_0 מרוכב,

$$e^{s_0 t}x(t) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} X_+(s-s_0)\,. \tag{6.4.10}$$

התמרת לפלס חד צדדית מתאימה במיוחד לחישוב פתרונות של מד"ר לינאריות, עם תנאי התחלה. זאת מהסיבה הבאה.

משפט 6.4.4 אם $x(t)e^{-st} \to 0$ כאשר $t \to \infty$ אזי

$$\frac{d}{dt}x \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} sX_+(s) - x(0^-)\,. \tag{6.4.11}$$

כלומר תנאי ההתחלה באים לידי ביטוי בהתמרה החד צדדית, בניגוד למצב בהתמרה דו צדדית.
הוכחה:

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{d}{dt}x\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}\,dt \tag{6.4.12}$$

אינטגרציה בחלקים

$$= x(t)e^{-st}\Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-st}\,dt \tag{6.4.13}$$

$$= -x(0-) + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{6.4.14}$$

בגלל תנאי ההתכנסות, וזוהי התוצאה. מ.ש.ל.

על ידי שימוש חוזר בנוסחה זו נקבל

$$\frac{d^n}{dt^n}x \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} s^nX_+(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x^{(1)}(0^-) - \ldots - sx^{(n-2)}(0^-) - x^{(n-1)}(0^-) \tag{6.4.15}$$

$$= s^nX_+(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}x^{(k-1)}(0^-)\,. \tag{6.4.16}$$

בתנאי ש-$\frac{d^k}{dt^k}x(t)e^{-st} \to 0$ כאשר $t \to \infty$.

התמרה חד צדדית של מדרגה זהה כמובן להתמרה הדו צדדית. מכאן נובע מיד

משפט 6.4.5 התמרה של אינטגרל לא מסויים:

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} \frac{X_+(s)}{s}\,. \tag{6.4.17}$$

הוכחה: זהה להוכחה למקרה הדו צדדי. מ.ש.ל.

משפט 6.4.6 גזירה במשתנה s:

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} \frac{d}{ds}X(s)\,. \tag{6.4.18}$$

הוכחה: זהה למקרה הדו צדדי. מ.ש.ל.

משפט 6.4.7 שינוי סקלה: עבור $\alpha \geq 0$

$$x(\alpha t) \overset{\mathcal{L}_+}{\leftrightarrow} \frac{1}{\alpha}X_+\left(\frac{s}{a}\right)\,. \tag{6.4.19}$$

הוכחה: זהה להתמרה הדו צדדית. כמובן שלא ניתן להשתמש ב-a שלילי. מ.ש.ל.

משפטי הערך ההתחלתי והסופי קושרים את הערך של האות הזמני באפס עם ערך ההתמרה ב-s גדול, ולהיפך.

משפט 6.4.8 עבור אות ימני ללא נקודות סינגולריות בראשית או באינסוף, אם הגבולות הבאים קיימים אזי הם שווים:

ערך התחלתי

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} [sX_+(s)] \ , \tag{6.4.20}$$

ערך סופי

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} [sX_+(s)] \ . \tag{6.4.21}$$

דוגמה 6.4.9 עבור האות $x(t) = e^{-at}u(t)$ כאשר $a > 0$ הערך ההתחלתי הוא כמובן $e^0 u(0^+) = 1$ והערך הסופי הוא 0. במישור לפלס, אם נשתמש במשפט,

$$X_+(s) = \frac{1}{s+a} \tag{6.4.22}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{s}{s+a} = 1 = x(0^+) \tag{6.4.23}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{s+a} = 0 = x(\infty) \, . \tag{6.4.24}$$

לא נוכיח משפט זה, אך באופן אינטואיטיבי ננסה להבין את מהותו. נבחן את הפונקציה $z(t) = se^{-st}$. נשים לב כי

$$sX_+(s) = s\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}x(t)\, dt = \int_{0^-}^{\infty} z(t)x(t)\, dt \, . \tag{6.4.25}$$

השטח מתחת לפונקציה z הוא 1:

$$\int_{0^-}^{\infty} se^{-st}\, dt = 1 \, , \tag{6.4.26}$$

ועבור $s \to \infty$ רוב הפונקציה מרוכזת סביב הראשית (למעשה מימין לראשית). כלומר זהו קירוב לפונקצית דלתה, ובפרט קיבלנו את הערך ההתחלתי ב-0^+.

עבור הערך הסופי, מצד אחד

$$\mathcal{L}_+\left[\frac{dx}{dt}\right](s) = sX_+(s) - x(0^-) \tag{6.4.27}$$

מתכונת הגזירה. מצד שני,

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\mathcal{L}_+\left[\frac{dx}{dt}\right](s) &= \lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{dx}{dt}(t)\, dt && (6.4.28)\\
&= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx}{dt}(t)\, dt && (6.4.29)\\
&= x(\infty) - x(0^-) \, . && (6.4.30)
\end{aligned}$$

משתי המשוואות האחרונות נקבל

$$\lim_{s\to 0} sX_+(s) - x(0^-) = x(\infty) - x(0^-) \tag{6.4.31}$$

$$\lim_{s\to 0} sX_+(s)) = x(\infty)\,. \tag{6.4.32}$$

6.5 נתוח מד"ר על ידי לפלס חד צדדי

ראינו כי כאשר אנו מתייחסים למד"ר כמערכת כניסה יציאה, ניתן לקבל את תגובת ההלם דרך התמרת לפלס דו צדדית: חישוב פונקצית התמסורת הוא מיידי מהמשוואה, ועל ידי התמרה הפוכה נקבל את תגובת ההלם. התמרת לפלס חד צדדית מאפשרת ניתוח מפורט יותר, הכולל את השפעת תנאי ההתחלה.

נתבונן שוב במד"ר בצורתה הסטנדרטית

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{6.5.1}$$

כאשר נתונים תנאי התחלה באפס:

$$y(0^-), y^{(1)}(0^-), y^{(2)}(0^-), \ldots, y^{(N-2)}(0^-), y^{(N-1)}(0^-). \tag{6.5.2}$$

נבצע התמרה חד צדדית על שני צידי המשוואה ונקבל, בעזרת תכונת הליניאריות והנוסחה (6.4.15) עבור התמרה של נגזרת

$$\mathcal{L}_+\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}\right)(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{L}_+\left(\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right)(s) \tag{6.5.3}$$

$$= a_0 Y_+(s) + \sum_{n=1}^{N} a_n \left(s^n Y_+(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} y^{(k-1)}(0^-)\right) \tag{6.5.4}$$

$$= Y_+(s)\sum_{n=0}^{N} a_n s^n - \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} y^{(k-1)}(0^-)\right). \tag{6.5.5}$$

בצורה דומה

$$\mathcal{L}_+\left(\sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right)(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m \mathcal{L}_+\left(\frac{d^m x(t)}{dt^m}\right)(s) \tag{6.5.6}$$

$$= b_0 X_+(s) + \sum_{m=1}^{M} b_m \left(s^m X_+(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{m-k} x^{(k-1)}(0^-)\right) \tag{6.5.7}$$

$$= X_+(s)\sum_{m=0}^{M} b_m s^m - \sum_{m=0}^{M} b_m \left(\sum_{k=1}^{m} s^{m-k} x^{(k-1)}(0^-)\right). \tag{6.5.8}$$

את השוויון

$$\mathcal{L}_+\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}\right)(s) = \mathcal{L}_+\left(\sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right)(s) \tag{6.5.9}$$

ניתן לכן לכתוב כך

(6.5.10)

$$Y_+(s)\sum_{n=0}^{N}a_ns^n = X_+(s)\sum_{m=0}^{M}b_ms^m + \sum_{n=1}^{N}a_n\left(\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}y^{(k-1)}(0^-)\right) - \sum_{m=1}^{M}b_m\left(\sum_{k=1}^{m}s^{m-k}x^{(k-1)}(0^-)\right)$$

(6.5.11)

$$Y_+(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M}b_ms^m}{\sum_{n=0}^{N}a_ns^n}X_+(s) + \frac{\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}y^{(k-1)}(0^-)\right)}{\sum_{n=0}^{N}a_ns^n} - \frac{\sum_{m=1}^{M}b_m\left(\sum_{k=1}^{m}s^{m-k}x^{(k-1)}(0^-)\right)}{\sum_{n=0}^{N}a_ns^n}$$

האיבר הראשון אינו אלא $H(s)X_+(s)$: כלומר זוהי התגובה המתקבלת מקונוולוציה עם תגובת ההלם של המערכת (של המד"ר). האיבר השני הוא בדיוק התגובה בכניסה אפס, כלומר Y_{ZIR}. אם כן, התמרת לפלס החד צדדית נותנת לנו כלי לחישוב התגובה הכללית של מערכת המתוארת על ידי מד"ר---כסכום של תגובה לתנאי התחלה ותגובה לכניסה.

פרק 7

טור פוריה

טור פוריה הוא שיטה לטיפול באותות מחזוריים.

כפי שראינו, אות אקספוננציאלי מהצורה e^{st} הוא אות עצמי של מערכות לינאריות (מערכות קונוולו-ציה ומד"ר) ולכן חישוב התגובה הוא פשוט יחסית. אם אות הכניסה הוא $x(t) = e^{j\omega t}$ אזי התגובה היא $H(j\omega)e^{j\omega t}$. לכן נרצה לייצג אותות כלליים יותר כסכום של אותות אקספוננציאליים---שכן אז נוכל להעזר בלינאריות ולחשב את התגובה בצורה פשוטה. אם $x(t) = \sum_k e^{j\omega_k t}$ אזי עקב הלינאריות התגובה תהיה

$$y(t) = \sum_k H(j\omega_k)e^{j\omega_k t}\,. \tag{7.0.1}$$

פירוק האות לסכום של אותות הרמוניים ניתן לעשות לאותות מחזוריים. כיוון שאות מחזורי נקבע על פי ערכיו על פני מחזור אחד, נרצה להציג אות המוגדר על האינטורוול $[0,T]$ כסכום מהצורה

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \tag{7.0.2}$$

כאשר $\omega_0 = 2\pi/T$ הוא התדר (הזויתי) הבסיסי. אנו משתמשים במונח תדר בסיסי משום שכל סכום מהצורה למעלה הוא כמובן פונקציה מחזורית עם מחזור T, משום שכל אחד מהאברים הוא מחזורי:

$$e^{jk\omega_0 t} = e^{j(k\omega_0 t + k2\pi)} = e^{j(k\omega_0 t + k\omega_0 T)} = e^{jk\omega_0 (t+T)}. \tag{7.0.3}$$

7.1 טור פוריה-חזרה

החומר בסעיף זה הוא חזרה על הקורס "טורי פוריה והתמרות אינטגרליות".

נזכר כי $L_2[0,T]$ הוא אוסף האותות המוגדרים עבור $0 \le t \le T$ ואשר יש להם אנרגיה סופית באינטרוול, כלומר

$$\int_0^T |x(t)|^2\, dt < \infty. \tag{7.1.1}$$

המכפלה הפנימית במרחב זה היא

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y^*(t)\,dt \tag{7.1.2}$$

ואנרגיה סופית משמעותה כמובן נורמה סופית כיון שהנורמה היא

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle\,. \tag{7.1.3}$$

התדר הבסיסי המתאים לקטע באורך T הוא $\omega_0 = 2\pi/T$. אוסף האותות

$$\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\} \tag{7.1.4}$$

מהווה בסיס אורתונורמלי עבור פונקציות ב-$L_2[0,T]$ כלומר

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{jk\omega_0 t}e^{-jm\omega_0 t}\,dt = \delta(k-m) \tag{7.1.5}$$

כאשר $\delta(n)$ היא פונקצית הדלתה של קרונקר (להבדיל מהדלתה של דירק!)---שווה ל-1 אם $n=0$ ואחרת שווה 0. לכן מתקיים המשפט הבא.

משפט 7.1.1 עבור אות x ב-$L_2[0,T]$ נגדיר את מקדמי פוריה

$$a_n \doteq \langle x(t), e^{jn\omega_0 t}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt. \tag{7.1.6}$$

אזי הטור הסופי מהווה קרוב טוב ל-x במובן *MSE: Mean Square Error*, כלומר

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T \left|x(t) - \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{jn\omega_0 t}\right|^2 dt = 0. \tag{7.1.7}$$

בנוסף, אוסף המקדמים $\{a_n\}$ הוא הטוב ביותר לצורך קירוב סופי של x במובן הבא. יהי $\{b_n\}$ אוסף מקדמים כלשהוא ונבחר שני שלמים N, M, אזי השגיאה הריבועית של הקירוב על ידי $\{a_n\}$ קטנה מזו של הקירוב על ידי $\{b_n\}$:

$$\int_0^T \left|x(t) - \sum_{n=-N}^{M} a_n e^{jn\omega_0 t}\right|^2 dt \le \int_0^T \left|x(t) - \sum_{n=-N}^{M} b_n e^{jn\omega_0 t}\right|^2 dt. \tag{7.1.8}$$

יהיו כעת $\{c_n\}$ מקדמי פוריה של אות y אשר גם הוא ב-$L_2[0,T]$. אזי מתקיים משפט פרסוול:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y^*(t)\,dt = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n b_n^*, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2. \tag{7.1.9}$$

נשים לב כי אם אות מחזורי נתון בצורת טור פוריה מהצורה (7.0.2) אזי כמובן ניתן לשחזר את המקדמים $\{a_k\}$ דרך (7.1.6).

כמו במקרה של התמרת פוריה, אם האות x מקיים תנאים מסויימים, אזי אפשר לקרב אותו בעזרת טור אינסופי גם במובן הנקודתי.

משפט 7.1.2 תנאי דיריכלה. יהיה x אות אינטגרבילי (אות ב-$L_1[0,T]$). אזי מקדמי פוריה מוגדרים היטב על ידי (7.1.6).
אם בנוסף האות רציף למקוטעין, כלומר לאות מספר סופי של נקודות אי רציפות, וכן לאות מספר סופי של נקודות מינימום ומקסימום, אזי הקירוב על ידי טור מתכנס עבור כל t באנטרוול $[0,T]$:

$$\lim_{N\to\infty, M\to\infty} \sum_{n=-N}^{M} a_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2}\big[x(t^-) + x(t^+)\big]. \tag{7.1.10}$$

חשוב להדגיש כי מקדמי פוריה נותנים את הקירוב הטוב ביותר רק במובן של שגיאה ריבועית. בעיבוד אותות מחפשים לעיתים קירוב אשר המרחק המקסימלי בינו לבין האות הוא קטן ככל האפשר. זאת כמובן ניתן לעשות רק כאשר הקירוב הוא מהסוג של משפט 7.1.2. הבה נראה כי במובן זה הקירוב על ידי טור פוריה אינו טוב במיוחד.

7.2 תופעת גיבס

כפי שראינו ממשפט 7.1.2, הקירוב על ידי טור סופי מתכנס בכל נקודת רציפות t של x לערך של $x(t)$, אך בנקודות קפיצה הוא מתכנס לערך ביניים. באופן מעשי אנו תמיד נשתמש בקירוב על ידי מספר סופי של אברים. השאלה אם כך היא: מהי השגיאה של קירוב סופי כזה? האם היא קטנה ככל שנגדיל את מספר האיברים? ניתן להשתמש בכלים של התמרת פוריה כדי לנתח נקודה זו. נסמן את התדר הבסיסי ב-ω_0. נניח שמתקיימים תנאי דיריכלה כך שהטור מתכנס נקודתית. קירוב על ידי מספר סופי של אברים שקול לחסימת תדרים גבוהים---משום שתדרים גבוהים פירושם $n\omega_0$ גדול, ולכן גם $|n|$ גדול. לכן קירוב סופי שקול להעברת הטור דרך מסנן מעביר נמוכים. נסמן ב-$H_N(\omega)$ את המסנן מעביר נמוכים המעביר את כל התדרים עד וכולל $N\omega_0$ (למען הדיוק, צריך לבחור מסנן המעביר מעט מעבר ל-$N\omega_0$, אך נזניח נקודה זו).
אם נסמן ב-$h_N(t)$ את תגובת ההלם של מסנן זה, אזי

$$x_N(t) \doteq \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{jn\omega_0 t} = x(t) * h_N(t). \tag{7.2.1}$$

את תגובת ההלם של המסנן מעביר נמוכים חישבנו בעבר: כיוון ש-$\omega_0 = 2\pi/T$, אזי עבור $t \neq 0$

$$h_N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_N(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \tag{7.2.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-N\omega_0}^{N\omega_0} e^{j\omega t}\, d\omega \tag{7.2.3}$$

$$= \frac{1}{2\pi j t}\left[e^{jN\omega_0 t} - e^{-N\omega_0 t}\right] \tag{7.2.4}$$

$$= \frac{1}{\pi t}\sin(N\omega_0 t) \tag{7.2.5}$$

$$= \frac{2N}{T}\frac{T}{2N}\frac{1}{\pi t}\sin(N\omega_0 t) \tag{7.2.6}$$

$$= \frac{2N}{T}\frac{\sin(N\omega_0 t)}{N\omega_0 t} \tag{7.2.7}$$

$$= \frac{2N}{T}\operatorname{sinc}(N\omega_0 t). \tag{7.2.8}$$

עבור $t = 0$ נקבל תוצאה זו בצורה דומה. נזכר כי $\mathrm{sinc}(0) = 1$ וכי זוהי נקודת המכסימום של ה-sinc. השטח מתחת לפונקציה זו (בהתחשב בסימן!) הוא

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2N}{T}\,\mathrm{sinc}(N\omega_0 t)\,dt = \mathcal{F}(h_N)\Big|_{\omega=0} = H_N(0) = 1. \tag{7.2.9}$$

לכן h_N הוא מעין קרוב של פונקצית δ. היא נעשית צרה וגבוהה סביב 0 ככל ש-N גדל. כיוון שרוב ההשפעה שלה היא סביב 0, כדי לבדוק את השפעת הקירוב הסופי בנקודת אי רציפות של פונקציה, מספיק לבדוק מה קורה לקירוב סופי של פונקצית מדרגה u סביב נקודת אי הרציפות שלה, כלומר סביב הנקודה $t = 0$. נתבונן בגרף של פונקצית sinc ונשים לב כי עבור $t = 0$ נקבל מהקונוולוציה $(u * h_N)(0) = 1/2$: זאת כיוון שה-sinc היא פונקציה סימטרית, עם שטח כולל 1. מצד שני, הערך המקסימלי של הקונוולוציה יתקבל עבור $t = \frac{2\pi}{N\omega_0}$ כלומר באפס הראשון של ה-sinc. אפשר להראות כי ערך זה הוא בקירוב 1.08. אולם חשוב מכך, ערך זה אינו תלוי כלל ב-N! כלומר השגיאה המירבית של הקירוב אינה קטינה כאשר N גדל. אם כן, קבלנו את התוצאה הבאה. ממשפט דיריכלה, בכל t נתון (שהוא נקודת רציפות), טור פוריה מתכנס. אולם אם יש לאות נקודת אי רציפות כלשהיא, אזי השגיאה המרבית היא של כ- 8%, ונקודת הזמן בו השגיאה היא מקסימלית מתקרבת לנקודת אי הרציפות ככל ש-N גדל. כלומר, התחום---האינטרוול---בו השגיאה משמעותית, מצטמצם עם גידול N, אך לא השגיאה המרבית. זוהי תופעת גיבס Gibbs.

כאמור, ישנם יישומים בהם השגיאה המרבית היא הגודל החשוב. עבור יישומים כאלו הקירוב על ידי טור פוריה אינו מתאים, ויש להשתמש בקירובים אחרים. נראה דוגמה בהמשך.

7.3 התמרת פוריה לאותות מחזוריים

אות מחזורי (שאינו שווה אפס) עם מחזור T אינו יכול להיות אינטגרבילי, כיוון ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{t=(m-1)T}^{mT} |x(t)|\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{t=0}^{T} |x(t)|\,dt = \infty \tag{7.3.1}$$

כאשר השוויון הלפני אחרון נובע מהמחזוריות. לכן נתייחס לאות כזה, לצורך התמרת פוריה, כפונקציה מוכללת. נעשה חישוב פורמלי (ניתן להצדיק את החישוב, אך לא נכנס לדקויות המתמטיות). נתון אות מחזורי בייצוג פוריה

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\,, \quad a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt, \tag{7.3.2}$$

כאשר את האנטגרל ניתן לעשות על כל אינטרוול שאורכו T עקב המחזוריות. נשתמש בלינאריות של התמרת פוריה ובהתמרה $\mathcal{F}\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$ ונקבל

$$\mathcal{F}\{x\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathcal{F}\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\omega - k\omega_0). \tag{7.3.3}$$

דוגמה להתמרה כזו ראינו כאשר חישבנו את ההתמרה של cos. לסיכום קיבלנו כי התמרת פוריה של אות מחזורי אשר מקדמי פוריה שלו הם $\{a_n\}$ נתונה על ידי

$$\boxed{\mathcal{F}\{x\}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\omega - k\omega_0).} \tag{7.3.4}$$

בניגוד להתמרת פוריה של אות "רגיל", התמרה של אות מחזורי מתאפסת ברוב התדרים, פרט לכפולות של התדר הבסיסי. מצד שני, ההתמרה היא פונקציה מוכללת.

דוגמה חשובה להתמרה של אות מחזורי מתייחסת לאות המוכלל הנקרא "מסרק הלמים" או "רכבת הלמים." כפי שנראה, זהו אות מרכזי לנושא הדגימה.

הגדרה 7.3.1 מסרק הלמים הוא האות המוכלל, שהוא אות מחזורי עם מחזור T,

$$w_T(t) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\,. \tag{7.3.5}$$

כיוון שזהו אות מחזורי, נרשום אותו כטור פוריה (ושוב, נדלג על ההצדקה המתמטית) אשר מקדמיו הם

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\,. \tag{7.3.6}$$

מכאן ומ-(7.3.4) נקבל את הנוסחה החשובה

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right\}(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\omega_0) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-k\omega_0)\,. \tag{7.3.7}$$

כלומר התמרת פוריה של מסרק הלמים (בזמן) נותנת מסרק הלמים (בתדר).

הערה מתמטית: מהחישוב (7.3.6) מתקבל טור פוריה של x_T בצורה

$$x_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}\,. \tag{7.3.8}$$

ברור שהסכום בצד ימין אינו מתכנס. הפירוש הנכון עבורו הוא שכמו צד שמאל של המשוואה, זוהי פונקציה מוכללת. כמו כל פונקציה מוכללת, היא מוגדרת על ידי פעולתה על פונקצית בחן. פעולה זו מצידה מוגדרת דרך גבול:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}\right)\phi(t)\,dt \doteq \lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-N}^{N} e^{jk\omega_0 t}\phi(t)\,dt. \tag{7.3.9}$$

צד ימין מתכנס כיוון שזהו סכום ערכים של התמרת פוריה של ϕ: כיוון שההתמרה של פונקצית בחן היא בעצמה פונקצית בחן (במשתנה ω), הסכום מתכנס.

7.4 דגימה ושחזור

חלק ניכר מעיבוד האותות נעשה כיום במחשב, כלומר אנו מטפלים באותות שהם בעצם סדרת מספרים. כמובן שבאות בזמן רציף טמון מידע רב יותר מאשר בכל סדרת מספרים המייצגת ערכים של האות בנקודות זמן בדידות. השאלה היא האם ניתן לדגום את האות בצורה כזו שניתן יהיה לשחזרו במדויק מתוך דגימותיו.

חשוב להדגיש כי אנו מתייחסים כאן רק לפן אחד של דגימה, והוא ייצוג פונקציה (בזמן רציף) על ידי סדרת מספרים. פן נוסף וחשוב לצורך טיפול ממוחשב הוא העובדה כי מספרים במחשב מיוצגים בדיוק סופי, ולכן בפועל מתבצע "עיגול". בנושא זה דנים למשל בקורסי עיבוד אותות.

הגדרה 7.4.1 בהנתן אות x, האות הדגום במרווח דגימה של T הוא סדרת המספרים (אות בזמן בדיד)

$$x_s(n) \doteq x(nT). \tag{7.4.1}$$

לצורך הניתוח המתמטי נשתמש במסרק הלמים $w_T(t)$ (ראה הגדרה 7.3.1). נסמן $x_T(t) \doteq x(t)w_T(t)$. נקבל

$$x_T(t) = x(t)w_T(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \tag{7.4.2}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \tag{7.4.3}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k)\delta(t-kT). \tag{7.4.4}$$

קיבלנו ייצוג בזמן רציף של האות הדגום $x_s(n)$. קצב הדגימה הוא $\omega_s = 2\pi/T$. נבצע התמרת פוריה לאות $x_T(t) = x(t)w_T(t)$ ונקבל

$$\mathcal{F}\{xw_T\}(\omega) = X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right\}(\omega) \tag{7.4.5}$$

$$= \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \left[\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\right](\omega) \tag{7.4.6}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega-k\omega_s). \tag{7.4.7}$$

קיבלנו אוסף (אינסופי) של הזזות של האות המקורי. תנאי מספיק כדי שניתן יהיה לשחזר את האות המקורי הוא שההזזות לא תגרומנה לחפיפה בתחום תדר כלשהוא.

משפט 7.4.2 משפט הדגימה. אם האות x הוא מוגבל תדר לרוחב B, כלומר $X(\omega) = 0$ עבור $|\omega| \geq B$, ואם דוגמים את x בתדר ω_s שהוא גבוה מתדר נייקויסט (*Nyquist rate*), כלומר $\omega_s \geq 2B$, אזי ניתן לשחזר את x במדויק מתוך דגימותיו.

הערה: תנאי זה אינו הכרחי, ודוגמאות נראה בהמשך.

הוכחה: יהיה H_B מסנן מעביר נמוכים ברוחב B ובגובה T. אם ניצור מהאות הדגום את האות x_T ונעביר אותו דרך מסנן זה אזי מתוך (7.4.7) נקבל

$$X_T(\omega)H_B(\omega) = X(\omega) \tag{7.4.8}$$

כנדרש. מ.ש.ל.

ההוכחה מראה כי המידע קיים באות הדגום, אך זו לא שיטת שיחזור אפשרית כיוון שאין לנו דרך לייצר מסרק הלמים ולא ניתן לבנות מסנן מעביר נמוכים אידאלי. מעבר לכך, ההוכחה אינה רומזת כיצד ניתן

לבנות משחזר מעשי. נרשום כעת הוכחה נוספת המציגה במפורש את שיטת השיחזור. מתוך האות הדגום נייצר אות בזמן רציף על ידי הכפלה באותות sinc מוזזים, ונקבל

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}(t-kT)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k)\delta(t-kT) * \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}(t)\right) \tag{7.4.9}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT) * T\frac{1}{\pi}\frac{\omega_s}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}(t)\right) \tag{7.4.10}$$

$$= \left(x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right) * T\frac{1}{\pi}\left(\frac{\omega_s}{2}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}(t)\right). \tag{7.4.11}$$

נחשב התמרות פוריה: ההתמרה של האיבר הימני בקונוולוציה היא בדיוק $H_{\omega_s/2}$ (המוגדר בהוכחת משפט הדגימה 7.4.2), וההתמרה של האיבר השמאלי היא התמרה של מכפלה בזמן:

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right\} = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\omega-k\omega_s) \tag{7.4.12}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega-k\omega_s). \tag{7.4.13}$$

בגלל ש-X מוגבל בתדר, נקבל שיחזור מושלם. מ.ש.ל.

הוכחה זו מרמזת על הדרך לשחזור מעשי: נכפיל באות המקרב sinc, ונעביר במסנן מעביר נמוכים מקורב.

7.5 שיחזור מעשי

פעולת הדגימה היא פעולה פשוטה, למעשה חסרת זיכרון: ברגע נתון מודדים את ערך האות ורושמים אותו לפנינו. פעולת השיחזור שראינו, לעומת זאת, אינה פעולה מעשית. לצורך ההוכחה השתמשנו ברכבת הלמים---אות תאורטי אשר כמובן שאין ביכולתנו לייצר. גם ההוכחה הנוספת אינה מציגה שיטה מעשית: כדי לשחזר את ערך האות ברגע t עלינו להשתמש בערכי הדגימה $x_s(n)$ לכל n: כלומר באוסף אין סופי של ערכים, ובפרט בערכים בעתיד.

באופן מעשי אנו מעוניינים בשיחזור פשוט, ורצוי שההשהיה תהייה לא גדולה. כלומר היינו רוצים לבצע את השחזור ברגע t תוך שימוש בערכי $x_s(n)$ עבורם t קרוב ל-nT. השיחזור הפשוט ביותר נקרא שיחזור מסדר אפס ZOH: Zero Order Hold. בשיחזור זה אנו שומרים על הערך האחרון הידוע, כלומר נגדיר

$$x_r(t) = x_s(n), \quad nT \le t < nT+T\,. \tag{7.5.1}$$

כדי לנתח שיחזור זה נגדיר פונקציה חדשה:

$$p_T(t) \doteq \begin{cases} 1 & 0 \le t < T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{7.5.2}$$

כעת נוכל לרשום את האות המשוחזר x_r כך:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n)p_T(t-nT)\,. \tag{7.5.3}$$

האות המשוחזר x_r הוא אות "מדרגות": הוא קבוע על פרקי זמן באורך T ואז קופץ לערכו החדש. כדי לנתח אות זה בתחום התדר ולהשוות אותו לאות המקורי, נציג אותו בעזרת x_T כך:

$$p_T(t-nT) = p_T(t) * \delta(t-nT) \tag{7.5.4}$$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n) p_T(t) * \delta(t-nT) \tag{7.5.5}$$

$$= p_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n)\delta(t-nT) \tag{7.5.6}$$

$$= p_T(t) * x_T(t) \tag{7.5.7}$$

כאשר x_T מוגדר במשוואה (7.4.2). לכן

$$X_r(\omega) = P_T(\omega) X_T(\omega)\,. \tag{7.5.8}$$

מהוכחת משפט הדגימה אנו יודעים כי אם P_T היה מסנן מעביר נמוכים (בתדר המתאים) אזי השחזור היה מושלם. נחשב אם כן התמרה זו. נגדיר גירסה מוזזת של p_T אשר תתן אות סימטרי ובעזרתו נחשב את $P_T(\omega)$:

$$p_{TS}(t) = \begin{cases} 1 & -T/2 \le t < T/2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \tag{7.5.9}$$

$$P_{TS}(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \tag{7.5.10}$$

$$p_T(t) = p_{TS}(t-T/2) \tag{7.5.11}$$

$$P_T(\omega) = e^{-j\omega T/2} P_{TS}(\omega) \tag{7.5.12}$$

$$= e^{-j\omega T/2} T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \tag{7.5.13}$$

$$|P_T(\omega)| = T\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right|\,. \tag{7.5.14}$$

כמובן שאות זה אינו קרוב למסנן מעביר נמוכים. כדי שהקירוב יהיה טוב (ולכן השיחזור יהיה סביר), עלינו להקטין שתי תופעות: השפעת ההזזות של $X(\omega)$ לתדרים גבוהים (כלומר נרצה ש-$P_T(\omega)$ יהיה קטן שם), ועיוותים הנגרמים מכך שערכו של $P_T(\omega)$ אינו קבוע בתדרים סביב אפס. שתי התופעות נחלשות אם תדר הדגימה יהיה גבוה (או T קטן). מקובל לכן לבחור $2\pi/T = \omega_0 \gg 2B$, כאשר באופן מעשי מדובר על תדר כפול משולש או יותר ביחס לתדר נייקויסט. היתרון הוא אם כן משחזר פשוט למימוש אשר נותן שיחזור ללא כל השהיה (ערך האות המשוחזר תלוי רק בדגימות בזמנים קודמים). החיסרון---יש צורך בדגימה בקצב גבוה יותר, דבר שהוא קשה יותר טכנית ובנוסף כמות המידע שאנו צריכים לשמור (מספר הדגימות) גדול פי כמה. ביחס למשחזר אידאלי, כמובן שחסרון נוסף הוא שהשחזור אינו מושלם, למרות קצב הדגימה הגבוה.

בצורה דומה ניתן לנתח משחזר לינארי למקוטעין First Order Hold. נגדיר את פונקצית האינטרפולציה

$$i_T(t) \doteq \begin{cases} 1+t/T & -T \le t \le 0 \\ 1-t/T & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{7.5.15}$$

נגדיר את האות המשוחזר על ידי

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n) i_T(t-nT) \tag{7.5.16}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n) i_T(t) * \delta(t-nT) \tag{7.5.17}$$

$$= i_T(t) * x_T(t) \tag{7.5.18}$$

$$X_r(\omega) = I_T(\omega) X_T(\omega)\,. \tag{7.5.19}$$

נשים לב כי בעוד משחזר ה-ZOH משתמש רק במידע על העבר של האות המשוחזר, המשחזר הלינארי דורש מידע עד T יחידות זמן קדימה, כלומר באופן מעשי נוכל לקבל את התוצאות רק בהשהיה של T יחידות זמן.

כמו בניתוח של ZOH לצורך הנתוח נחשב את ההתמרה של i_T. אולם

$$i_T(t) = \frac{1}{T} p_{TS}(t) * p_{TS}(t) \tag{7.5.20}$$

$$I_T(\omega) = \frac{1}{T} P_{TS}^2(\omega) \tag{7.5.21}$$

$$= T \,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)\,. \tag{7.5.22}$$

זהו אות חיובי אשר דועך מהר (כאשר ω גדל) יותר מאשר P_T. לכן יש לצפות שההשפעה של הזזות תהיה קטנה יותר, וניתן יהיה לדגום בתדר נמוך יותר (אך כמובן גבוה מתדר נייקויסט!).

7.6 קשרים בין התמרת לפלס, התמרת פוריה וטור פוריה

7.6.1 התמרת פוריה והתמרת לפלס

עבור אותות ימניים ואינטגרבילים, התמרת פוריה היא מקרה פרטי של התמרת לפלס. הדבר נובע ישירות מהעובדה כי שתי ההתמרות קיימות, והתמרת פוריה נתונה על ידי הנוסחה האינטגרלית. התמרת פוריה מוגדרת עבור משפחה רחבה של אותות מוכללים, וניתן לחשוב על אותות מסויימים (בפרט אותות לא-אינטגרבילים מסויימים) כאותות מוכללים, ובכך לקבל עבורם התמרת פוריה. התאוריה לגבי התמרת לפלס מוגבלת יותר, אך גם פשוטה יותר. ישנם אותות עבורם יש התמרת פוריה אך אין התמרת לפלס (למשל אותות ימניים $x(t)$ עבורם יש התמרת פוריה במובן המוכלל למרות ש-$x(t)e^{at}$ אינו אינטגרבילי לשום a).

מצד שני ישנם אותות עבורם יש התמרת לפלס אך אין התמרת פוריה (למשל $e^{at}u(t)$ כאשר $a > 0$). כאשר שתי ההתמרות קיימות ובפרט $s = 0$ נמצא בתחום ההתכנסות, אזי הצורה הפונקציונלית שווה, ונקבל

$$H(j\omega) = H(s)|_{\Re e\, s=0, \mathbb{I}m\, s=\omega} \ . \tag{7.6.1}$$

מהדוגמה שראינו עבורה אין התמרת פוריה אנו למדים כי התמרה זו מתאימה לטיפול במערכות יציבות (כך שהתגובה אינה כוללת אקספוננטים חיוביים). התמרת לפלס גמישה יותר במובן זה, ובפרט ההתמרה החד צדדית מותאמת לטפל בהשפעת תנאי התחלה ותופעות מעבר.

7.6.2 התמרת פוריה ומקדמי טור פוריה

את מקדמי טור פוריה ניתן לקבל מתוך התמרת פוריה של האות הבא. נגדיר

$$x_0(t) \doteq \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{7.6.2}$$

אזי מקדמי פוריה מתקבלים על ידי

$$a_k \doteq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt \tag{7.6.3}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_0(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt \tag{7.6.4}$$

$$= \frac{1}{T}X_0(\omega)\bigg|_{\omega=k\omega_0} . \tag{7.6.5}$$

כלומר מקדמי טור פוריה הם הדגימות של התמרת פוריה של מחזור אחד של הפונקציה, כאשר הדגימות הן בכפולות של התדר הבסיסי.

פרק 8

קטבים, אפסים ותגובה של מערכת לק"ב

גישה חשובה לתכנון וניתוח מערכות מחלקת את הבעיה לשלבים: תכנון מיקום הקטבים והאפסים של המערכת כדי שתענה לדרישות, ולאחר מכן תכנון מערכת אשר יש לה את הקטבים והאפסים הרצויים. בפרק זה נלמד להבין את משמעות מיקום הקטבים והאפסים מבחינת השפעתם על התנהגות המערכת.

אם תפקיד המערכת הוא לקבל אות כניסה (למשל חשמלי) ולהמיר אותו לאות מוצא מכני, או לאות חשמלי מוגבר, אזי נרצה שמוצא המערכת "יעקוב" אחרי אות הכניסה. כדי להבין מה השפעת מערכות שונות במובן זה, נשים בפרק זה דגש על התגובה למדרגה. הממדים אשר יגדירו את התנהגות המערכת יוגדרו בסעיף 8.2. באופן כללי הם עוסקים בשאלה כמה מהר מגיבה המערכת לכניסת מדרגה: כמה זמן לוקח עד שהתגובה קרובה ל-1 (גודל הכניסה), מהו גודל התנודות והזמן עד שהן דועכות וכו'.

8.1 מערכת מסדר ראשון

נתבונן במערכת הפשוטה ביותר---מערכת מסדר ראשון ללא אפסים.

דוגמה 8.1.1 נתונה מערכת אשר פונקצית התמסורת שלה היא

$$H(s) = \frac{1}{s+\lambda} \quad ROC_H = \{\Re e\,(s) > -\lambda\}\ . \tag{8.1.1}$$

נניח כי $\lambda > 0$ (ממשי), כלומר הקוטב הוא ב-$(-\lambda)$ שהוא שלילי. התגובה להלם היא אם כן

$$h(t) = e^{-\lambda t} u(t)\,. \tag{8.1.2}$$

התגובה למדרגה היא $s(t) = (u * h)(t)$ ולכן עבור $t \geq 0$,

$$s(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \tag{8.1.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda\tau} u(\tau)\, d\tau \tag{8.1.4}$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-\lambda\tau}\, d\tau \tag{8.1.5}$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \Big|_{0}^{t} \tag{8.1.6}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) . \tag{8.1.7}$$

כיוון ש-$\lambda > 0$ תגובת ההלם שואפת ל-0 עבור t גדול, ואילו תגובת המדרגה שואפת לקבוע---במקרה זה ל-$\frac{1}{\lambda}$. ככל ש-λ גדול יותר, כך תגובת המערכת מהירה יותר במובן שהמערכת ללא כניסה (לאחר תום השפעת ההלם) שואפת למצב מנוחה שהוא תגובה 0 במהירות גדולה יותר, ולמצב "יציב"---כלומר ללא שינויים---במהירות גדולה יותר במקרה של כניסת מדרגה. נגדיר למשל את זמן התגובה τ כזמן הדרוש עד שהתגובה למדרגה תתקרב עד כדי $1/e$ לערך הסופי (ב-t גדול). זה יקרה כאשר $e^{-\lambda\tau} = e^{-1}$ או

$$\tau = \frac{1}{\lambda} . \tag{8.1.8}$$

אם למערכת יש גם אפס כלשהוא, כלומר

$$H(s) = \frac{s+a}{s+\lambda} = \frac{a}{s+\lambda} + \frac{s}{s+\lambda} \tag{8.1.9}$$

אזי נקבל כי

$$h(t) = ae^{-\lambda t}u(t) + \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}u(t)\right) \tag{8.1.10}$$

$$= ae^{-\lambda t}u(t) + \left(-\lambda e^{-\lambda t}u(t) + \delta(t)\right) \tag{8.1.11}$$

$$= (a-\lambda)e^{-\lambda t}u(t) + \delta(t) . \tag{8.1.12}$$

עבור $a = \lambda$ נקבל שתגובת ההלם היא דלתה. בכל מקרה אחר, שוב התגובה לכניסת דלתה דועכת (עדיין בהנחה ש-$\lambda > 0$) במהירות התלויה ב-λ. התגובה למדרגה במקרה זה מתחילה בערך 1 (בגלל ה- δ) ומתקרבת לערך הסופי במהירות הנקבעת על ידי λ.

כיוון שניתן לרשום תגובת הלם של מערכת כללית יותר (לפחות כל מערכת המתוארת על ידי מישוואה דיפרנצאלית כזו שהפולינום האפייני הוא מסדר שאינו קטן מסדר הנגזרת הגבוהה ביותר בכניסה) כסכום של בטויים כאלו (על ידי פרוק לשברים חלקיים), המשמעות של הקטבים נשארת כבדוגמה---הם קובעים את קצב הדעיכה של התגובה (לדלתה) או קצב ההתכנסות שלה לערך היציב. ככל שמיקום הקוטב נמצא שמאלה יותר במישור המרוכב (כלומר חלקו הממשי שלילי יותר) כך המערכת מתייצבת במהירות גדולה יותר. בהמשך נפרט הסבר זה.

8.2 מערכת מסדר שני

נתבונן במשוואה דיפרנציאלית מסדר שני

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = x \tag{8.2.1}$$

כאשר כל המקדמים הם ממשיים. אפסי הפולינום האפייני הם

$$\frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}\right) . \tag{8.2.2}$$

אם $c \leq 0$ או באופן כללי יותר אם $b^2 \geq 4c$ אזי השרשים הם ממשיים, והניתוח של הסעיף הקודם תקף. כלומר ניתן לרשום את תגובת ההלם (או תגובת המדרגה) כסכום של תגובות לשתי מערכות מסדר ראשון (כל אחת עם שורש אחד מהשניים הממשיים), ולכן המסקנות זהות. נבחן לכן את המקרה בו השרשים הם מרוכבים. בפרט, אם השרשים מרוכבים אזי $c > 0$. על כן נוכל להגדיר משתנה ממשי וחיובי ω_n ומשתנה ממשי ξ שהגדרתם היא

$$\omega_n^2 = c \tag{8.2.3}$$

$$2\xi\omega_n = b\,. \tag{8.2.4}$$

התחום המעניין אותנו הוא $b^2 < 4c$ כלומר

$$4\xi^2\omega_n^2 < 4\omega_n^2 \to \xi^2 < 1\,. \tag{8.2.5}$$

אם כן, נבחן משוואה דפרנציאלית מסדר שני מהצורה

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 x \tag{8.2.6}$$

כאשר ω_n חיובי ו-ξ ממשי ומקיים $|\xi| < 1$. (המקדם של x מיועד לפשט מעט את הביטויים). נשים לב כי תאור זה אינו מתאים לכל משוואה לינארית מסדר שני. בנוסף, למרות שהעניין שלנו הוא במקרה $|\xi| < 1$, המשוואה מוגדרת היטב לכל ערך של ξ. נחשב את תגובת התדר על ידי ביצוע התמרת פוריה:

$$(j\omega)^2 Y(\omega) + 2\xi\omega_n j\omega Y(\omega) + \omega_n^2 Y(\omega) = \omega_n^2 X(\omega) \tag{8.2.7}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} \tag{8.2.8}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)} \tag{8.2.9}$$

$$c_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{8.2.10}$$

$$c_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\,. \tag{8.2.11}$$

בתנאים שלנו על ξ נקבל כצפוי זוג צמוד של שרשים מרוכבים. את תגובת התדר נוח לרשום בצורה

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}\,. \tag{8.2.12}$$

על ידי פירוק פונקצית התמסורת

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{8.2.13}$$

לשברים חלקיים אפשר לקבל את תגובת ההלם: אם מקדם השיכוך מקיים $|\xi| < 1$ מקבלים, לאחר מעט אלגברה

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right) u(t)\,. \tag{8.2.14}$$

חישוב תגובת המדרגה ארוך יותר, אולם חישוב ישיר נותן

$$\begin{aligned} s(t) &= (h*u)(t) && (8.2.15)\\ &= \left\{1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\left[\frac{e^{j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t}}{c_2} - \frac{e^{-j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t}}{c_1}\right]\right\} u(t) && (8.2.16)\\ &= \left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left[\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \theta\right]\right\} u(t)\,. && (8.2.17)\\ & && (8.2.18) \end{aligned}$$

כאשר $\theta = \cos^{-1}(\xi)$. ברור מנוסחאות אלו כי עבור שיכוך קטן (ξ קטן) התנודות הן בקצב בערך ω_n. לעומת זאת עבור שיכוך גדול ($|\xi| \approx 1$) קצב הדעיכה הוא ω_n והתנודות הן איטיות. בנוסף, תגובת המדרגה יכולה להיות שלילית עבור ערכים מסויימים של t: במקרה זה ערך התגובה עולה על ערך הכניסה וקבלנו תופעה של overshoot.

עבור מערכת מסדר שני אנו מקבלים את שתי התופעות העיקריות בתגובת מדרגה: קצב התכנסות לערך הסופי ותנודות. נגדיר אם כן מספר מדדים המתארים התנהגות זו באופן כמותי. נניח שהמערכת יציבה כך שתגובת המדרגה היא אות חסום, ונניח שעבור t גדול תגובת המדרגה שואפת לערך סופי אשר נסמן ב- y_{ss} (steady state). זהו המצב במערכת מסדר שני המתוארת בסעיף זה, ובלבד ש-$\xi > 0$. נגדיר כעת

- t_r - זמן העליה (Rise time) הוא הזמן עד שהתגובה מגיעה לערך של 90% מ-y_{ss}.
- t_p - הזמן לשיא (peak) הוא הזמן בו מתקבל הערך המכסימלי של התגובה.
- OS - החריגה למעלה (overshoot) היא החריגה המרבית מעל לערך הסופי y_{ss}. לרוב מבוטא באחוזים.
- t_s - זמן ההתייצבות (settling time) הוא הזמן אשר ממנו והלאה התגובה מתייצבת בתוך "צינור" נתון סביב הערך הסופי. רוחב מקובל הוא אחוזים בודדים: 1%, 2% או 5%, בהתאם לדיוק הנדרש מהמערכת.
- e_{ss} - שגיאת המצב המתמיד, מוגדרת כ-$1 - y_{ss}$ כלומר השגיאה ביחס הערך של הכניסה - מדרגה.

דוגמה 8.2.1 עבור המערכת (8.1.1) אפשר לחשב את t_r בצורה הבאה:

$$e^{-\lambda t_r} = 0.1 \tag{8.2.19}$$

$$t_r = -\frac{\log 0.1}{\lambda} \tag{8.2.20}$$

כאשר הלוגריתם הוא על הבסיס הטבעי. כמובן ש-t_p הוא אין סופי שכן התגובה עולה בצורה מונוטונית. החריגה OS היא 0 מאותה סיבה. חישוב זמן ההתיצבות זהה לחישוב זמן העליה: עבור ערך שגיאה של α (אשר מקבל את הערכים $0.01, 0.02$ או 0.05)

$$e^{-\lambda t_s} = \alpha \tag{8.2.21}$$

$$t_s = -\frac{\log \alpha}{\lambda}\,. \tag{8.2.22}$$

לבסוף, $e_{ss} = 0$.

דוגמה 8.2.2 עבור המערכת מסדר שני (8.2.6) נניח תחילה ש-$\xi > 0$. אם $\xi^2 > 1$ התנהגות המערכת (לפחות מבחינה איכותית) דומה למערכת מסדר ראשון, שכן לא תהיינה תנודות. בתחום זה של הערכים נאמר שהמערכת היא בריסון יתר (*overdamped*). במצב זה למערכת שני קטבים ממשיים אך שונים בצד שמאל של המישור המרוכב. המעבר ממצב זה להתנהגות הכוללת תנודות הוא כאשר $\xi^2 = 1$; מצב זה נקרא ריסון קריטי ובמקרה זה למערכת זוג קטבים ממשיים זהים בצד שמאל של המישור המרוכב. אם $\xi < 1$ אזי תהיינה תנודות ואנו במצב תת ריסון (*underdamped*). במקרה זה למערכת זוג קטבים מרוכבים (צמודים) בצד שמאל של המישור המרוכב. המערכת בלתי מרוסנת אם $\xi = 0$ ובמקרה זה התגובה היא מחזורית. במקרה זה למערכת זוג קטבים מדומים (צמודים) על הציר המדומה של המישור המרוכב.

לבסוף, אם $\xi < 0$ המערכת אינה יציבה והקטבים הם בצד ימין של המשור המרוכב. תנודות תהיינה כל עוד $\xi^2 < 1$.

8.3 מפת קטבים ואפסים, תגובה במישור הזמן

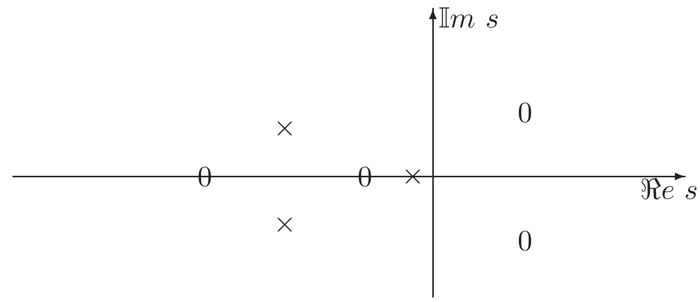
נשים לב כי כל מערכת המתוארת על ידי מד"ר, ובצורה שקולה כל מערכת בעלת פונקצית תמסורת רציונלית ניתן לתאר בצורה

$$H(s) = C\,\frac{\prod_{n=1}^{N}(1+s/\alpha_n)}{\prod_{m=1}^{M}(1+s/\beta_n)} = C'\,\frac{\prod_{n=1}^{N}(s+\alpha_n)}{\prod_{m=1}^{M}(s+\beta_n)} \tag{8.3.1}$$

כאשר אפסי המערכת הם $(-\alpha_n)$ וקטבי המערכת הם $(-\beta_m)$. לכן ניתן לתאר את המערכת בעזרת הקבוע C ובעזרת שרטוט-מפת קטבים ואפסים-המתאר את מיקום הקטבים והאפסים של המערכת.

בשרטוט זה זוג אפסים צמודים מרוכבים בצד ימין של המישור המרוכב, ושאר הקטבים והאפסים בצד שמאל. הם כוללים קוטב ממשי, שני אפסים ממשיים וזוג קטבים צמודים (מרוכבים).

שאלה: כיצד משפיע כל אחד מהקטבים והאפסים על תגובת המערכת, והאם יש קטבים המשפיעים יותר?



איור 8.1: מפת קטבים ואפסים

כדי לחקור זאת נתבונן שוב במערכת מסדר שני עם פונקצית תמסורת

$$T_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \ . \tag{8.3.2}$$

כעת נוסיף למערכת אפס בנקודה $(-a)$ ונקבל מערכת חדשה

$$T(s) = T_0(s) + \frac{s}{a}T_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\left(1 + \frac{s}{a}\right) \ . \tag{8.3.3}$$

אם נרשום זאת בצורה

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{s}{a}\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{8.3.4}$$

אזי ברור מהלינאריות כי התגובה היא התגובה למדרגה של T_0, בתוספת הנגזרת של תגובה זו (כפול קבוע). כלומר, אם נסמן את התגובה של T_0 למדרגה ב-$s(t)$ אזי התגובה למדרגה של המערכת T היא

$$y(t) = s(t) + \frac{1}{a}\dot{s}(t) \, . \tag{8.3.5}$$

הבה נראה כי התגובה היא עדיין מהצורה

$$y(t) = \left[1 + A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}\right] u(t) \ . \tag{8.3.6}$$

כדי לראות זאת נציב את (8.2.15)--(8.2.17) במשוואה (8.3.5), ונשים לב שמכיוון שמדובר בפונקצית תמסורת עבורה סדר המונה קטן ממש מסדר המכנה, תגובת המדרגה אינה יכולה להכיל δ: כלומר המקדמים הם כאלו שנגזרת הדלתה מתאפסת (זאת ניתן לראות גם מאיזון הלמים).

המסקנה היא שתוספת האפס משפיעה על המקדמים, אך לא על קבועי הזמן λ_1, λ_2. השינוי במקדמים יגרום כמובן שינוי במדדים שהגדרנו (חריגה וכו') אולם במקרה היציב לא ישפיע על הערך הסופי.

אם המערכת היא יציבה, כלומר הקטבים נמצאים בצד שמאל של המישור המרוכב, אזי אפשר לראות מהביטוי הכללי לתגובת המדרגה (תוך שימוש במשפטי ערך סופי וערך התחלתי) ש-$s(t)$ עולה עבור t קטן. לכן הנגזרת היא חיובית, ואם $a > 0$ (כלומר האפס שהוספנו הוא בצד שמאל של המישור המרוכב) גם התגובה של T עולה בזמנים קצרים. לעומת זאת אם $a < 0$ אזי הנגזרת יורדת, ונקבל שהתגובה למדרגה מתחילה בירידה אל מתחת לאפס, ורק אחר כך עליה. במובן זה יש שוני מהותי בין הוספת אפס בצד שמאל של המישור המרוכב (מערכת minimum phase) לבין הוספת אפס בצידו הימני של המישור המרוכב.

בנוסף ברור מהביטוי שקיבלנו כי ככל ש-a גדול יותר, כלומר ככל שהאפס נמצא רחוק יותר בצד שמאל של המישור המרוכב, כך תהיה השפעתו קטנה יותר. ולהיפך, לאפס קרוב לראשית תהיה השפעה גדולה, לפחות בזמנים קצרים. נשים לב כי תוספת אפס שני תגרום לכך שסדר המונה שווה לסדר המכנה, וכעת יהיה שינוי מהותי בהתנהגות המערכת.

כיצד משפיעה הוספת קוטב נוסף? נגדיר כעת

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{1 + s/\beta} \ . \tag{8.3.7}$$

כעת אם נעשה פירוק לשברים חלקיים נקבל שני אברים המתאימים לקטבים המקוריים (עם מקדמים אחרים) ובנוסף ביטוי מהצורה

$$\frac{A_3}{1 + s/\beta} \ . \tag{8.3.8}$$

במישור הזמן התמרה הפוכה תיתן ביטוי מהצורה

$$y(t) = \left[B_0 + B_1 e^{-\lambda_1 t} + B_2 e^{-\lambda_2 t} + B_3 e^{-\beta t}\right] u(t) \ . \tag{8.3.9}$$

נניח ש-$\beta > 0$ והמערכת יציבה: עדיין הקצב שבו מתכנסת התגובה למצב היציב יכול להיות מושפע בצורה מהותית על ידי β. זה יקרה אם $|\Re e\, \beta|$ קטן מ- $\xi\omega_n$. כלומר, הקוטב הקרוב יותר לציר המדומה ישפיע בצורה מהותית יותר על קצב ההתכנסות. אם לעומת זאת β הוא בעל חלק ממשי גדול, ההשפעה תהיה מועטה.

ניתוח דומה ניתן לעשות עבור מערכות מסדר גבוה יותר, דרך מפת הקטבים והאפסים:

כל עוד סדר המונה קטן ממש מסדר המכנה, ההשפעה של האפסים היא על ההתנהגות ב-t קטן בלבד, והם אינם משפיעים על קצב ההתכנסות.

הקטבים הקרובים לציר המדומה הם המשפיעים בצורה מהותית על קבועי הזמן של המערכת.

8.4 קטבים אפסים הגבר ופאזה

נתאר כעת ביתר פירוט את ההגבר והפאזה של תגובת התדר. נניח שנתונה פונקציית תמסורת $H(s)$ עבורה $j\omega$ נמצא בתחום ההתכנסות. (נניח כי H היא פונקציה רציונלית---כפי שקורה כאשר המערכת מתוארת על ידי מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים). נזכר כי האות ההרמוני $e^{j\omega_0 t}$ הוא אות עצמי של המערכת. כלומר התגובה לכניסה כזו היא

$$y(t) = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} \tag{8.4.1}$$

$$= c\frac{P(j\omega_0)}{Q(j\omega_0)} e^{j\omega_0 t} \tag{8.4.2}$$

$$= c\frac{\prod_{i=0}^{M}(j\omega_0 + \beta_i)}{\prod_{i=0}^{N}(j\omega_0 + \alpha_i)} e^{j\omega_0 t} \tag{8.4.3}$$

כאשר רשמנו את פולינום המונה ופולינום המכנה כמכפלה לפי מיקום שורשי המונה $\{-\beta_i\}$ והמכנה $\{-\alpha_i\}$ בהתאמה. כמובן שאנו מניחים, כרגיל, שפונקצית התמסורת היא לאחר צמצום כלומר אין גורם משותף

למונה ולמכנה. לכן $\{-\alpha_i\}$ הם קטבי המערכת ו-$\{-\beta_i\}$ הם אפסי המערכת. נשים לב כי השתמשנו בקבוע אחד c כדי לנרמל את שני הפולינומים כך שהמקדם הגבוה ביותר שלהם יהיה שווה 1. נרשום את המספר המרוכב $j\omega_0+\alpha_i$ בצורה פולרית, כלומר לפי גודל וזוית, ונעשה זאת גם עבור האפסים. כלומר נרשום

$$j\omega_0+\beta_i=|j\omega_0+\beta_i|e^{\phi_i^z} \tag{8.4.4}$$

$$j\omega_0+\alpha_i=|j\omega_0+\alpha_i|e^{\phi_i^p}\ . \tag{8.4.5}$$

כמובן שהפאזה ϕ_i^z של האפס ה-i תלויה בתדר ω_0, וכמוה גם הפאזה ϕ_i^p של הקוטב ה-i-י. כעת נוכל לרשום את תגובת התדר כך:

$$H(j\omega_0)=c\,\frac{\prod_{i=0}^{M}(j\omega_0+\beta_i)}{\prod_{i=0}^{N}(j\omega_0+\alpha_i)} \tag{8.4.6}$$

$$=|c|\frac{\prod_{i=0}^{M}|j\omega_0+\beta_i|}{\prod_{i=0}^{N}|j\omega_0+\alpha_i|}e^{j\measuredangle c+j\sum_{i=1}^{M}\phi_i^z-j\sum_{i=1}^{N}\phi_i^p} \tag{8.4.7}$$

ובפרט, הגודל של תגובת התדר הוא

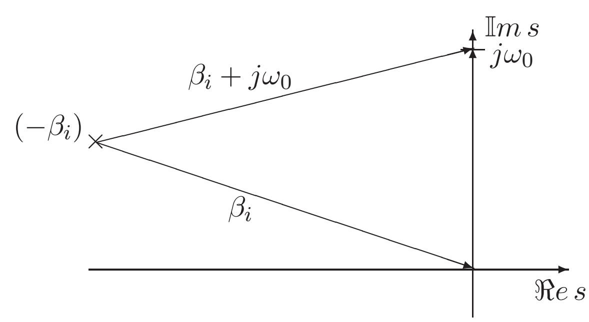
$$|H(j\omega_0)|=|c|\,\frac{\prod_{i=0}^{M}|j\omega_0+\beta_i|}{\prod_{i=0}^{N}|j\omega_0+\alpha_i|} \tag{8.4.8}$$

(8.4.9)

והפאזה היא

$$\measuredangle H(j\omega_0)=\measuredangle c+\sum_{i=1}^{M}\phi_i^z-\sum_{i=1}^{N}\phi_i^p\ . \tag{8.4.10}$$

אולם הגודל $|j\omega_0+\beta_i|=|j\omega_0-(-\beta_i)|$ הוא בדיוק המרחק בין האפס בנקודה $(-\beta_i)$ לבין הנקודה $j\omega_0$.

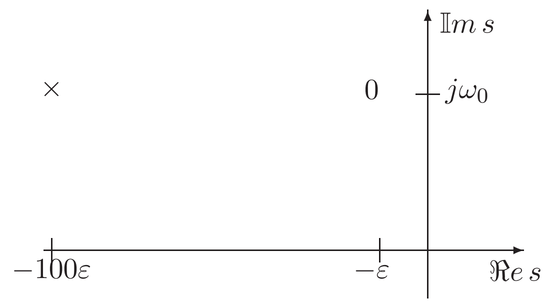


איור 8.2: גודל של גורם מסדר ראשון

כלומר ניתן לחשב את הגודל של תגובת התדר בתדר נתון ω_0 על ידי היחס בין מכפלת המרחקים של אפסי המערכת מהנקודה ω_0 על הציר המדומה, לבין מכפלת המרחקים של קטבי המערכת מהנקודה ω_0 על הציר המדומה.

לצורך חישוב זה דרוש כי $j\omega_0\in ROC$, אך הוא אינו תלוי בהנחות אחרות (כגון יציבות, סיבתיות וכו'). ממשוואה (8.4.8) ניתן להסיק מייד כי קוטב הממוקם קרוב לציר המדומה יגרום להגבר גבוה בתדרים הקרובים לחלקו המדומה. לעומת זאת אפס במיקום דומה יגרום לניחות חזק בתדרים המתאימים.

דוגמה 8.4.1 נתכנן מסנן חוסם סרט, אשר יחסום רק סביבה קרובה של התדר ω_0 (מסנן כזה נקרא *Notch filter*). למען הפשטות---כדי לקבל מערכת מסדר ראשון עם קוטב מרוכב---נתכנן מערכת שאינה ממשית. נבחר גודל קטן $\varepsilon \ll 0.01$ ונתבונן במערכת בעלת קוטב יחיד ב-$(-\alpha) = -100\varepsilon + j\omega_0$ ואפס יחיד קרוב יותר לציר המדומה כלומר $(-\beta) = -\varepsilon + j\omega_0$.



איור 8.3: מסנן מסדר 2

מהחישוב (8.4.8) נקבל כי עבור מערכת זו

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(\omega-\omega_0)^2+\varepsilon^2}{(\omega-\omega_0)^2+10000\varepsilon^2}\,. \tag{8.4.11}$$

עבור $\omega \approx \omega_0$ נקבל כי

$$|H(j\omega)| \approx \left(\frac{\varepsilon^2}{10000\varepsilon^2}\right)^{1/2} = 0.01\,, \tag{8.4.12}$$

כלומר קיבלנו ניחות חזק כדרוש. לעומת זאת כיוון ש-ε קטן, הרי שעבור ω שאינו קרוב מאד ל-ω_0 (בפרט אם $|\omega-\omega_0| \gg 100\varepsilon$) נקבל

$$|H(j\omega)| \approx \left(\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(\omega-\omega_0)^2}\right)^{1/2} = 1\,. \tag{8.4.13}$$

קבלנו מסנן בעל ניחות גדול סביב תדר ω_0 אך ללא עיוות (כלומר שווה בקירוב ל-1בתדרים שאינם סביב ω_0.

התאור שלפנינו מתאים לא רק כאשר תגובת המערכת ניתנת לפירוק לשברים חלקיים כאוסף של קטבים מסדר ראשון, אלא גם כאשר ישנם קטבים ממשיים מסדר גבוה יותר. כדי להבין את התופעות הקשורות בקטבים מרוכבים ומרובים, די להבין את התנהגות מערכת מסדר שני.

8.5 הצגה גרפית של תגובת התדר---דיאגרמת בודה

לפי (8.4.8) את גודל וזוית תגובת התדר ניתן לרשום בצורה

$$|H(j\omega_0)| = |c|\,\frac{\prod_{i=0}^{M}|j\omega_0+\beta_i|}{\prod_{i=0}^{N}|j\omega_0+\alpha_i|} \tag{8.5.1}$$

$$\measuredangle H(j\omega_0) = \measuredangle c + \sum_{i=1}^{M}\phi_i^z - \sum_{i=1}^{N}\phi_i^p\,. \tag{8.5.2}$$

נתחיל בתאור האלמנטים הבסיסיים.

8.5.1 קוטב ממשי מסדר ראשון

נרשום את תגובת התדר בצורה

$$\frac{c}{j\omega+\alpha} = \frac{c/\alpha}{1+j\omega/\alpha}\,. \tag{8.5.3}$$

אם שהמערכת ממשית, הגודל c ממשי. לכן התרומה של c/α לפאזה היא π אם היחס ביניהם (או, באופן שקול, המכפלה) שלילי, או 0 אם היחס חיובי. לכן ברישום פולרי (גודל וזוית)

$$\frac{c}{j\omega+\alpha} = \frac{|c/\alpha|}{\sqrt{1+\omega^2/\alpha^2}} e^{j\pi u(-c\alpha)-j\tan^{-1}(\omega/\alpha)} \tag{8.5.4}$$

כאשר u היא פונקצית המדרגה. באופן כללי יותר אם c מרוכב אזי נרשום

$$\frac{c}{\alpha} = \left|\frac{c}{\alpha}\right| e^{j(\phi_c-\phi_\alpha)} \tag{8.5.5}$$

כאשר ϕ_c היא הפאזה של המספר המרוכב c ו-ϕ_α הוא 0 או π, לפי הסימן של α. לכן במקרה הכללי יותר נקבל

$$\frac{c}{j\omega+\alpha} = \frac{|c/\alpha|}{\sqrt{1+\omega^2/\alpha^2}} e^{j(\phi_c-\phi_\alpha)-j\tan^{-1}(\omega/\alpha)}\,. \tag{8.5.6}$$

הגענו לצורה סטנדרטית של מערכת כזו, במובן הבא. נבדוק את השפעת המכנה תחילה, כאשר את התדר נמדוד ביחידות של ω/α. אזי לכל המערכות אותה צורה של הגבר ואותה צורה של פאזה כפונקציה של התדר. כמובן שגדלים אלו מושפעים מהמונה, אולם זוהי השפעה קבועה (כפל בגודל, הזזה קבועה בפאזה). הצורה הכללית היא שעבור ω קטן המכנה אינו משפיע (ההגבר והפאזה קבועים). ההשפעה מתחילה להיות משמעותית כאשר מתקרבים ל-$\omega=\alpha$.

בתדר $\omega=\alpha$ ההגבר ירד, ביחס להגבר בתדר נמוך:

$$\left|\frac{H(j\omega)|_{\omega=\alpha}}{H(j\omega)|_{\omega\ll\alpha}}\right| = \left|\frac{(c/\alpha)/(1+j)}{(c/\alpha)/1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{8.5.7}$$

בתדר גבוה יותר נקבל

$$\sqrt{1+\omega^2/\alpha^2} \approx \omega/\alpha \tag{8.5.8}$$

ולכן ההגבר יורד בצורה לינארית ב-ω.

חשבון דומה מראה כי הפאזה בנקודה $\omega=\alpha$ קטנה ב-$\pi/4$ מהפאזה ב-ω קטן. כאשר נמשיך ונגדיל את ω מעבר ל-α נקבל כי הזוית קטנה ב-$\pi/2$ מהזוית בתדר נמוך.

המצב דומה עבור אפס מסדר ראשון מהצורה

$$c(j\omega+\alpha) = c\alpha(1+j\omega/\alpha)\,. \tag{8.5.9}$$

כאשר כאן כמובן ההגבר עולה ב-$\sqrt{2}$ בתדר הברך $\omega=\alpha$, ועולה בצורה לינארית ω/α עבור ω גדול. הפאזה גדלה ב-$\pi/4$ בתדר הברך וגדלה בעד $\pi/2$ בתדרים גבוהים יותר.

8.5.2 מערכת מסדר שני

כיוון שאנו עוסקים במערכת ממשית, הקטבים (וכן האפסים) הם או ממשיים, או זוגות מרוכבים צמודים. המצב מורכב יותר עבור זוג קטבים צמודים (או זוג אפסים צמודים). זאת מכיוון שכעת ההתנהגות תלויה לא רק בתדר הברך, אלא גם בפרמטר ξ. נרשום מערכת עם צמד קטבים מרוכבים בצורה

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} \tag{8.5.10}$$

$$= \frac{e^{-j\tan^{-1}\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}}}{\sqrt{(1-\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\,. \tag{8.5.11}$$

חישוב דומה למקרה של קוטב בודד מראה כי בתדר הברך $\omega = \omega_n$ ההנחתה היא של $|1/2\xi|$, כלומר עבור $|\xi|$ שגודלו מעל חצי אכן תהיה הנחתה, אולם עבור ξ קטן יותר נקבל הגברה! אם $|\xi| = 1/\sqrt{2}$ אזי ההנחתה בתדר הברך תהיה $1/\sqrt{2}$-כמו בקוטב בודד. אם $|\xi| = 1$ אזי ההנחתה היא כמו זוג קטבים ממשיים (ואכן במקרה זה נקבל זוג קטבים ממשיים!). ירידת הפאזה גם היא תלויה בגורם הניחות ξ. בתדר גבוה בהרבה ההנחתה נשלטת על ידי האבר הראשון והיא בקירוב ω_n^2/ω^2, כלומר שוב הנחתה כפי שהיינו מקבלים מזוג קטבים ממשיים עם אותו תדר ברך, והפאזה ירדה ב-π. כלומר בתדר נמוך וגבוה ההתנהגות היא בקירוב כמו של שני קטבים, ללא תלות ב-ξ. בתדר הברך ξ משפיע על ההנחתה ועל הפאזה. בתדרי ביניים ההשפעה של ξ משמעותית---ובמיוחד בתדרים הקרובים לתדר הברך.

הרחבה של ניתוח זה למערכת ממשית עם תגובת תדר רציונלית היא לכאורה פשוטה---נפרק לשברים חלקיים ונטפל בכל איבר בנפרד. כמובן שהדבר ניתן לביצוע, בפרט במחשב. אולם נוח יותר לעבור לקואור-דינטות שונות. המבנה המקובל ביותר הוא של סקאלה לוגריתמית של ההגבר ושל התדר (עבור תדרים חיוביים בלבד), וסקאלה לינארית עבור הפאזה. ביתר דיוק

הגדרה 8.5.1 עבור ערך חיובי α, גודלו בדציבלים *Decibels* (או בקיצור *db*) הוא

$$20\log_{10}\alpha\,. \tag{8.5.12}$$

כך למשל הגבר פי 1 הוא $0db$, הגבר פי 10 הוא $20db$ וכו'. נפעיל כעת הגדרה זו על ההגבר: ראינו כי אם תגובת התדר כוללת רק אפסים וקטבים פשוטים אזי

$$|H(j\omega_0)| = |C|\frac{\prod_{i=0}^{M}|j\omega_0+\beta_i|}{\prod_{i=0}^{N}|j\omega_0+\alpha_i|} \tag{8.5.13}$$

$$\measuredangle H(j\omega_0) = \measuredangle c + \sum_{i=1}^{M}\phi_i^z - \sum_{i=1}^{N}\phi_i^p\,. \tag{8.5.14}$$

אם נפריד בין קטבים ואפסים ממשיים, לבין זוגות צמודים מרוכבים נקבל

$$|H(j\omega_0)| = |c| \frac{\prod |q_i(j\omega)|}{\prod |p_k(j\omega)|} \tag{8.5.15}$$

$$q_i(j\omega) = \begin{cases} j\omega + \beta_i & \text{אפס ממשי פשוט} \\ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j2\xi_i \frac{\omega}{\omega_i}\right) & \text{זוג אפסים צמודים מרוכבים} \end{cases} \tag{8.5.16}$$

$$p_k(j\omega) = \begin{cases} j\omega + \alpha_k & \text{קוטב ממשי פשוט} \\ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} + j2\xi_k \frac{\omega}{\omega_k}\right) & \text{זוג קטבים צמודים מרוכבים} \end{cases} \tag{8.5.17}$$

לכן אם נחשב את ההגבר בדציבלים נקבל, מתכונות הלוגריתם

$$|H(j\omega)|_{db} = |C|_{db} + \sum_i |q_i(j\omega)|_{db} - \sum_k |p_k(j\omega)|_{db} \tag{8.5.18}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle c + \sum_i \measuredangle(q_i(j\omega)) - \sum_k \measuredangle(p_k(j\omega)). \tag{8.5.19}$$

כעת אם ננתח כל אחד מהמחוברים יהיה קל למדי לשרטט את הגרף הכולל.

שיטה הנדסית חשובה לקרב את שני הגרפים האלו היא דיאגרמת בודה האסימפטוטית. בגישה זו אנו מקרבים את השפעת כל אחד מהאברים תוך שימוש בערכים עבור ω קטן או גדול, וקירוב עבור ערכי הביניים. נזכר כי מדובר בסקאלה לוגריתמית של התדר.

עבור קוטב פשוט ראינו כי ההגבר הוא קבוע בתדר נמוך---ונמשיך קירוב זה עד לתדר הברך. בתדרים גבוהים יותר הגבר של קוטב פשוט נתון על ידי

$$20\log\frac{1}{|1+j\omega/\alpha|} = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2/\alpha^2}} \tag{8.5.20}$$

$$\approx -10\log\left(\omega^2/\alpha^2\right) \tag{8.5.21}$$

$$= 20\log\alpha - 20\log\omega\,. \tag{8.5.22}$$

זהו קו ישר עם שיפוע של (-20) כאשר משרטטים את הגודל בדציבלים מול סקאלה לוגריתמית בתדר. בצורה דומה נקבל כי אפס ממשי פשוט נותן באופן אסימפטוטי שיפוע חיובי של $20db/decade$. חישוב דומה נותן כי (שוב בקירוב אסימפטוטי) צמד קטבים מרוכבים נותן ירידה, מתדר הברך והלאה, של $(-40db/dec)$ וצמד אפסים נותן עליה בגודל זהה.

הקירוב האסימפטוטי עבור הפאזה פשוט יותר: בסקלה לוגריתמית (של משתנה התדר) ולינארית בפאזה, עבור קוטב מסדר ראשון הפאזה קבועה עד דקדה אחת לפני תדר הברך, ומשם יורדת בצורה לינארית עד דקדה אחת אחרי תדר הברך (ירידה של $\pi/2$). עבור אפס פשוט המצב דומה אך יש עליה בפאזה. זוג קטבים מרוכבים יגרמו להתנהגות התלויה באופן חזק במקדם הריסון, אך גם כאן תחילת השינוי בפאזה הוא דקדה לפני תדר הברך וסיומה דקדה אחריו.

פרק 9

דוגמה מסכמת: מסנן מעשי

לאחר שהכרנו שיטות לניתוח מערכות בתחום התדר, כולל התמרות לפלס ופוריה, נסכם את הנושא בדוגמה לניתוח ותכנון של מסנן.

מסנני Butterworth הם מערכות לינאריות קבועות בזמן וסיבתיות, המתוארות בתחום התדר. הם אחד מסוגי המסננים המקובלים ביותר בהנדסה: זאת משום פשטות התכנון והמימוש, ומצד שני בשל גמישותם. בהמשך נגדיר משפחה זו של מסננים, ננתח אותם ונתכנן מסנן לפי דרישות נתונות. אנו נעסוק במסנן מעביר נמוכים: זוהי אבן פינה לתכנון מסננים כלליים, גם משום שזהו מסנן פשוט ובסיסי, וגם משום שניתן לתכנן מסננים רבים אחרים על ידי תכנון מסנן מעביר נמוכים תחילה, ואז התאמתו (על ידי הזזה בתדר למשל) לדרישות.

9.1 המסנן ותכונותיו

מסנן Butterworth מוגדר כך:

הגדרה 9.1.1 מסנן *Butterworth* מסדר N הוא מערכת לינארית, קבועה בזמן וסיבתית אשר תגובת התדר שלה $H_N(j\omega)$ מקיימת עבור $\omega_0 > 0$ כלשהוא,

$$|H_N(j\omega)|^2 \doteq \frac{1}{1+(j\omega/j\omega_0)^{2N}} \ . \tag{9.1.1}$$

עבור מסנן כללי המקיים

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\Lambda\left(j\omega/j\omega_0\right)} \ , \tag{9.1.2}$$

נקרא ל-Λ פונקצית הניחות, ול-ω_0 תדר הייחוס.

בהמשך נראה כיצד לממש מסנן כזה. אולם כבר מההגדרה אנו מסיקים את התכונות הבאות:

1. גודל תגובת התדר $|H(j\omega)|$ של המסנן יורד בצורה מונוטונית עם עליית התדר ω.
2. הערך המרבי של תגובת התדר הוא בתדר $\omega = 0$ והוא מקיים $\left|H(j\omega)\right|_{\omega=0} = 1$.

3. גודל תגובת התדר יורד ל- $1/\sqrt{2}$ בתדר ω_0:

$$\left|H(j\omega_0)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{9.1.3}$$

4. הניחות האסימפטוטי (ראה דאגרמת בודה) הוא $20N$ dB /decade.

5. תגובת התדר מקיימת

$$\left.\frac{\partial^k \left|H(j\omega)\right|^2}{\partial\omega^k}\right|_{\omega=0} = 0 \qquad 1 \le k \le 2N-1. \tag{9.1.4}$$

מסנן מעביר נמוכים בעל תכונה זו נקרא בעל שטיחות מקסימלית maximally flat בתדר אפס.

9.2 מבנה המסנן

נרצה לממש את המסנן על ידי מערכת ממשית (כלומר מערכת עם תגובת הלם ממשית). מתכונות התמרת פוריה

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = H(j\omega)\cdot H^*(j\omega) = H(j\omega)\cdot H(-j\omega). \tag{9.2.1}$$

כדי לחשב את מיקום הקטבים של המסנן, נרשום את הדרישות על פונקצית התמסורת של המסנן:

$$H(s)\cdot H(-s) = \frac{1}{1+\left(s/j\omega_0\right)^{2N}}\ . \tag{9.2.2}$$

מכאן נובע מיידית כי הגודל של כל הקטבים של $H(s)H(-s)$ הוא ω_0, והם נתונים על ידי הדרישה כי $\left(s_k/j\omega_0\right)^{2N} = -1$ ולכן

$$s_k = \omega_0 \exp\left(j\left[\frac{\pi(2k+1)}{2N}+\frac{\pi}{2}\right]\right) \qquad 0 \le k \le 2N-1. \tag{9.2.3}$$

כלומר השרשים של ריבוע המסנן מקיימים את התכונות הבאות.

1. כל השרשים ממוקמים, במרווחים זוויתיים שווים של π/N, על מעגל שרדיוסו ω_0.

2. ראשית, אין שרשים על הציר המדומה $s = j\omega$ משום ש-$\left(j\omega_1/j\omega_0\right)^{2N} \neq -1$. כעת נשים לב כי מדרישת הממשיות אנו מקבלים את נוסחה (9.2.1) וממנה נובע כי אם s_k הוא קוטב של $|||H|||^2$ אזי גם $(-s_k)$ הוא שורש, ומהממשיות נובע כי אם s_k הוא קוטב אזי גם s_k^* (הצמוד המרוכב) הוא שורש. כיוון שכל השרשים הם על מעגל ברדיוס ω_0 מספר השרשים הממשיים הוא או 0 או 2. אם כך, ישנן שתי אפשרויות: או שכל השרשים מרוכבים ואז מספר השרשים מתחלק ב-4, ואז אין שרשים ממשיים. זה יקרה אם N זוגי שכן זה בדיוק המקרה שמספר השרשים מתחלק ב-4. האפשרות השנייה היא שיש שני שרשים ממשיים: במקרה זה מספר השרשים אינו מתחלק ב-4, ולכן בהכרח N הוא אי זוגי.

מההגדרה של המסנן נובע כי אם $\sigma + j\omega_i$ הוא קוטב, אזי גם $(-\sigma - j\omega_i)$ הוא קוטב. כלומר, הקטבים של $H(s)H(-s)$ מופיעים בזוגות מהצורה $(\sigma + j\omega_i, -\sigma - j\omega_i)$. כדי לממש מסנן יציב, נבחר את הקטבים אשר חלקם הממשי שלילי להיות הקטבים של $H(s)$. שאר הקטבים יהיו לכן קטבי $H(-s)$. לדוגמה, הרי פונקציות התמסורת של מסנני Butterworth מסדר 1–3:

$$H_1(s) = \frac{\omega_0}{s+\omega_0}\ , \tag{9.2.4}$$

$$H_2(s) = \frac{\omega_0^2}{(s+\omega_0\exp(j\pi/4))\,(s+\omega_0\exp(-j\pi/4))} \tag{9.2.5}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{s^2+\sqrt{2}\omega_0 s+\omega_0^2}, \tag{9.2.6}$$

$$H_3(s) = \frac{\omega_0^3}{(s+\omega_0)\,(s+\omega_0\exp(j\pi/3))\,(s+\omega_0\exp(-j\pi/3))} \tag{9.2.7}$$

$$= \frac{\omega_0^3}{s^3+2\omega_0 s^2+2\omega_0^2 s+\omega_0^3}\ . \tag{9.2.8}$$

9.3 תכנון המסנן

כדי לתכנן מסנן עלינו להגדיר כמה קריטריונים מקובלים בתכנון מסננים. נזכור ששאיפתנו היא לתכנן מסנן מעביר נמוכים.

הגדרה 9.3.1 עבור מסנן מעביר נמוכים מעשי H,

1. נגדיר שלושה תחומי תדר: תחום ההעברה *Passband*: $0 \leq \omega \leq \omega_p$, תחום המעבר *Transition band*: $\omega_p \leq \omega \leq \omega_s$ ותחום הניחות *Stopband*: $\omega_s \leq \omega$.

2. הגליות δ_p של המסנן H היא המרחק המירבי בין גודל המסנן לבין 1, בתחום ההעברה:

$$\delta_p \doteq \max_{0\leq\omega\leq\omega_p} ||H(j\omega)|-1|. \tag{9.3.1}$$

3. גורם הניחות δ_s הוא הגודל המירבי של H בתחום הניחות:

$$\delta_s \doteq \max_{\omega\geq\omega_s} |H(j\omega)|. \tag{9.3.2}$$

4. תדר הקטעון הוא התדר מעליו גודל המסנן ירד ל-$1/\sqrt{2}$ מגודלו הנומינלי (שהוא 1).

5. גורם ההבחנה *discrimination factor*:

$$d \doteq \left[\frac{(1-\delta_p)^{-2}-1}{\delta_s^{-2}-1}\right]^{1/2}\ . \tag{9.3.3}$$

d הוא חיובי, ושואף לאפס כאשר הגליות או גורם הניחות (או שניהם) שואפים לאפס.

6. גורם הסלקטיביות *selectivity factor*: $\kappa \doteq \omega_p/\omega_s$. גורם הסלקטיביות קטן מ-1, ושווה ל-1 רק אם תחום המעבר נעלם.

עבור מסנן אידאלי, $\delta_s = \delta_p = 0$ ו-$\omega_p = \omega_s$ והם שווים לתדר הקטעון. כמובן שבמקרה זה גורם ההבחנה וגורם הסלקטיביות אינם מוגדרים.

נשים לב כי בהגדרת ה"שגיאה" של המסנן, הן הגליות והן גורם הניחות, אנו מתחשבים בהגבר בלבד, כלומר בערך המוחלט של $H(j\omega)$, ומתעלמים מהפאזה.

בעיית התכנון שננסה לפתור היא הבאה. נתונים לנו הערכים של $\omega_p < \omega_s, \delta_p > 0, \delta_s > 0$. מטרתנו היא לתכנן מסנן Butterworth אשר יעמוד בתנאים אלו. כלומר, עלינו למצוא N ו-ω_0 כך שנעמוד בתנאים הדרושים. נתחיל בקביעת סדר המסנן. כיוון שהגודל של המסנן הוא מונוטוני

$$|H_N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(j\omega/j\omega_0)^{2N}}} \ , \tag{9.3.4}$$

מספיק לבדוק את גודלו בנקודות ω_p ו-ω_s. הדרישות הן

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^{2N}} \geq (1-\delta_p)^2 \ , \tag{9.3.5}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2N}} \leq \delta_s^2 \ . \tag{9.3.6}$$

מכאן נקבל

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^{2N} (1-\delta_p)^2 \leq 1-(1-\delta_p)^2 \tag{9.3.7}$$

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^{2N} \leq \frac{1-(1-\delta_p)^2}{(1-\delta_p)^2} = (1-\delta_p)^{-2}-1 \tag{9.3.8}$$

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^{2N} \geq \frac{1-\delta_s^2}{\delta_s^2} = \delta_s^{-2}-1 \ . \tag{9.3.9}$$

נזכר כעת בהגדרות של גורם ההבחנה d וגורם הסלקטיביות κ: שניהם ניתנים לחישוב מתוך הגדלים הנתונים. נחלק את שני הביטויים האחרונים ונקבל

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N} \geq \frac{\delta_s^{-2}-1}{(1-\delta_p)^{-2}-1} = \frac{1}{d^2} \tag{9.3.10}$$

$$N \geq \frac{\log 1/d}{\log 1/\kappa}. \tag{9.3.11}$$

סדר המסנן אם כך צריך להיות השלם הקטן ביותר המקיים שוויון זה. כעת נוכל לחלץ את ω_0 מתוך נוסחאות (9.3.5)--(9.3.9):

$$\omega_p \left[(1-\delta_p)^{-2}-1\right]^{-1/2N} \leq \omega_0 \leq \omega_s \left[\delta_s^{-2}-1\right]^{-1/2N} \ . \tag{9.3.12}$$

(אם $\delta_p < 1/2, \ \delta_s < 1/2$ אזי יש פתרון). כפי שכבר ראינו, עבור מסנן זה ω_0 הוא תדר הקיטעון.

לסיכום, תהליך התכנון של המסנן כך שיעמוד בדרישות מורכב מהשלבים הבאים:

תכנון Butterworth

1. מתוך הנתונים חשב את גורם ההבחנה ואת גורם הסלקטיביות.
2. חשב את סדר המסנן (עגל כלפי מעלה).
3. חשב את תדר הקטעון.
4. חשב את מיקום הקטבים.

פרק 10

משוואות הפרש ומערכות בזמן בדיד

מערכת בזמן בדיד היא מערכת אשר אותות הכניסה וכן התגובה שלה הם אותות המוגדרים על ציר זמן בדיד. נסמן את משתנה הזמן באותות כאלו ב-t או, כאשר נרצה להדגיש כי מדובר בזמן בדיד, נשתמש באחת המאותיות המקובלות למשתנים בדידים: i, k, l, m, n. משתנה נוסף המקובל בספרות כמשתנה בדיד הוא j, אך אנו שומרים אות זו עבור $\sqrt{-1}$.

בפרק זה נדון בייצוג המרכזי עבור מערכות לינאריות וקבועות בזמן---משוואות הפרש. בפרק 11 נראה כי, כמו בזמן רציף, מערכות לינאריות ניתן לייצג כמערכות גרעין, ואם הן קבועות בזמן---כמערכות קונוולוציה.

משוואות הפרש מהוות מודל דינמי למערכות בזמן בדיד - ממערכות המתקבלות כקירוב (על ידי דגימה למשל) של מערכות בזמן רציף, ועד למערכות המממשות אלגוריתמים מסוגים שונים. בקורס זה נתייחס למשוואות כמתארות מערכת, כלומר מקבלות אות כניסה ומייצרות אות מוצא.

נתחיל בהגדרת משוואות הפרש לינאריות, נתאר את פתרונותיהן, ונבדוק מתי תכונות כלליות של מערכות מתקיימות במערכת המתוארת על ידי משוואות הפרש לינאריות.

אלגוריתם איטרטיבי כללי ניתן לתיאור על ידי המשוואה הבאה:

$$y(t) = f(t; y(t-1), \dots, y(t-N); x(t), x(t-1), \dots, x(t-M)) \tag{10.0.1}$$

כאשר f היא פונקציה המגדירה את הדינמיקה של המערכת, $x(t)$ הוא אות נתון---מבחינתנו הכניסה למערכת---ו-$y(t)$ היא התגובה. אנו נתרכז במקרה הלינארי---ומשלב זה נדון רק במשוואות הפרש לינאריות. מסיבה זו נשמיט את ה"לינאריות" ונקרא למשוואות "משוואות הפרש", או בקיצור מ.ה.

10.1 משוואות הפרש לינאריות ופתרונן

נעסוק במשוואות הפרש לינאריות בצורה הכללית הבאה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \tag{10.1.1}$$

כאשר $x(t)$ הוא אות נתון---מבחינתינו הכניסה למערכת---ו-$y(t)$ היא התגובה. אנו נניח תמיד כי $a_N \neq 0$ וכן $b_M \neq 0$, כיוון שאחרת ניתן להגדיר את הסכום עם איבר אחד פחות. בנוסף, נניח כי $a_0 = 1$: הסיבה

לכך תידון בהמשך. למעשה ההנחה האחרונה היא כי $a_0 \neq 0$, כיוון שתחת תנאי זה ניתן תמיד לחלק את כל המקדמים ב-a_0 ולקבל משוואה שקולה המקיימת $a_0 = 1$.

משפט 10.1.1 בהינתן אות $x(t)$ עבור $t \geq t_0 - M$ וכן תנאי התחלה

$$\{y(t_0-1), y(t_0-2), \ldots, y(t_0-N)\}$$

למשוואת ההפרש (10.1.1) יש פיתרון יחיד $\{y(t) : t \geq t_0\}$.

הוכחה: ישירות על ידי הצבה. נניח ש-$a_0 = 1$ ונרשום את המשוואה מחדש בצורה

$$y(t) = -\sum_{n=1}^{N} a_n y(t-n) + \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m). \qquad (10.1.2)$$

כך ניתן לחשב בצורה איטרטיבית את ערכי $y(t)$ עבור $t \geq t_0$. מ.ש.ל.

נשים לב כי ההוכחה נותנת לנו דרך לחשב את הפתרון של מ.ה לכל כניסה נתונה, ולכל זמן סופי. כמובן שחישוב זה לא יתן נוסחה סגורה עבור הפתרון---בהמשך נראה כיצד לקבל נוסחה סגורה כזו דרך קונוולוציה או דרך התמרות Z .

טענה 10.1.2 אם y_1 פותר את (10.1.1) עבור כניסה x_1 ותנאי התחלה

$$\{y_1(t_0-1), y_1(t_0-2), \ldots, y_1(t_0-N)\},$$

ו- y_2 פותר את (10.1.1) עבור כניסה x_2 ותנאי התחלה

$$\{y_2(t_0-1), y_2(t_0-2), \ldots, y_2(t_0-N)\},$$

אזי $\alpha y_1 + \beta y_2$ פותרים את (10.1.1) עבור כניסה $\alpha x_1 + \beta x_2$ ותנאי התחלה

$$\{\alpha y_1(t_0-1) + \beta y_2(t_0-1), \alpha y_1(t_0-2) + \beta y_2(t_0-2), \ldots, \alpha y_1(t_0-N) + \beta y_2(t_0-N)\}.$$

הוכחה: נציב ב-(10.1.1) ונקבל שהמשוואה מתקיימת. כמו כן מתקיימים תנאי ההתחלה. לפי משפט 10.1.1 למשוואה יש פתרון יחיד, ולכן נובע כי אכן זהו הפתרון. מ.ש.ל.

נשים לב כי הכניסה כוללת את תנאי ההתחלה של אות הכניסה: כלומר, אנו זקוקים לאות הכניסה החל מזמן $t_0 - M$ אם ברצונינו לחשב את התגובה החל מזמן t_0.

מ.ה מגדירה מערכת במובן הבא: עבור אות כניסה x המ.ה ביחד עם תנאי התחלה מגדירים תגובה או מוצא y. זהו הרעיון בבסיס המושג של "מערכת:" זהו תאור של קשר בין כניסה ותגובה. בהמשך נראה כיצד להתייחס לתנאי ההתחלה.

לפני שנדון במ.ה כמייצגות מערכות, נדון בשיטות חישוב הפתרון למ.ה. את ההוכחות ניתן בפרק מאוחר יותר הדן בהתמרת Z. השיטה הראשונה שנדון בה היא חישוב פתרון פרטי ופתרון הומוגני.

הגדרה 10.1.3 פתרון הומוגני של (10.1.1) הוא פתרון המשוואה כאשר $x \equiv 0$ (כלומר $x(t) = 0$ לכל t).
הפתרון ההומוגני הכללי של (10.1.1) הוא פתרון הומוגני בעל N פרמטרים חפשיים, כך שבחירתם מאפשרת התאמת הפתרון לכל תנאי התחלה. נסמן פתרון כזה ב-y_h.
פתרון פרטי של (10.1.1) הוא פתרון המשוואה עבור אות הכניסה הנתון x, ללא התחשבות בתנאי ההתחלה. נסמן פתרון כזה ב-y_p.

טענה 10.1.4 ניתן למצוא פתרון למ.ה (10.1.1) כך:

1. נמצא פתרון פרטי y_p,
2. נחשב את הפתרון ההומוגני הכללי y_h,
3. נחשב את ערכי הפרמטרים החופשיים של $y_h + y_p$ כך שיתאימו לתנאי ההתחלה הנתונים.

הוכחה: נובע מטענה 10.1.2. מ.ש.ל.
השיטה השניה לבניית פתרון היא על ידי חלוקה לפתרון בתנאי התחלה אפס, ולפתרון בכניסה אפס.
נזכר בהגדרה 2.1.5 של פתרון בכניסה אפס y_{ZIR} של (10.1.1), וכן של פתרון בתנאי התחלה אפס y_{ZSR}.

טענה 10.1.5 $y \doteq y_{ZIR} + y_{ZSR}$ הוא פתרון למ.ה (10.1.1).

הוכחה: נובע מטענה 10.1.2. מ.ש.ל.
נשים לב כי אם y_1 ו- y_2 פותרים את המ.ה עם כניסה זהה (אך תנאי התחלה שונים) אזי $y_1 - y_2$ הוא פתרון הומוגני. כמו כן, צירוף ליניארי של פתרונות הומוגניים הוא פתרון הומוגני.

הגדרה 10.1.6 נסמן השהיה בעזרת אופרטור ההזזה בזמן σ, כך שאת המ.ה (10.1.1) נרשום בצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \sigma^{-n} y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m \sigma^{-m} x(t). \tag{10.1.3}$$

הפולינום האפייני של (החלק ההומוגני) של המ.ה הוא הפולינום המתקבל מהחלפת σ במשתנה, למשל λ ונרמול על ידי כפל ב-λ^N כלומר

$$\lambda^N \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^{-n} = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^{N-n}. \tag{10.1.4}$$

שרשי הפולינום האפייני הם הערכים של λ כך שהביטוי (10.1.4) שווה לאפס.
הגורם λ^N מופיע (בניגוד לפולינום האפייני בזמן רציף) בגלל צורת ייצוג שבחרנו עבור מ.ה---בעזרת השהיות, כלומר חזקות שליליות של σ.

דוגמה 10.1.7 נחשב את הפולינום האפייני של המשוואה ההומוגנית

$$y(n) + \frac{3}{2} y(n-1) + \frac{1}{2} y(n-2) = 0. \tag{10.1.5}$$

כיוון ש-$N=2$, הפולינום האפייני הוא

$$\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2} \tag{10.1.6}$$

והמשוואה האפיינית היא

$$\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}=0. \tag{10.1.7}$$

שרשי המשוואה האפיינית הם $\lambda=-1, \lambda=-1/2$.

את הפתרון ההומוגני ניתן למצוא בצורה שיטתית.

משפט 10.1.8 נסמן ב-$\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ את השרשים של הפולינום האפייני של המ.ה. אזי הפתרון ההומוגני הכללי הוא

$$y_h(t)=\sum_{i=1}^{N}A_if_i(t) \tag{10.1.8}$$

כאשר A_i הם קבועים והפונקציות $f_i(t)$ הן פונקציות עצמיות של המשוואה ההומוגנית, ונתונות כלהלן.
אם λ_i הוא שורש בריבוי יחיד של הפולינום האפייני אזי $f_i(t)=\lambda_i^t$.
נניח כי λ_i הוא שורש בריבוי $k+1$, כלומר $\lambda_i=\lambda_{i+1}=\cdots=\lambda_{i+k}$ ושורש זה שונה מכל השרשים האחרים, אזי $f_{i+j}(t)=t^j\lambda_i^t$ עבור $0\le j\le k$.

את המשפט נוכיח, כאמור, לאחר שנלמד על התמרות Z. בשלב זה נסתפק בהמחשה. אות מהצורה $y(t)=\lambda^t$ הוא פתרון הומוגני של (10.1.3) אם מתקיים

$$0=\sum_{n=0}^{N}a_n\sigma^{-n}y(t)=\sum_{n=0}^{N}a_n\sigma^{-n}\lambda^t=\sum_{n=0}^{N}a_n\lambda^{t-n}=\lambda^{t-N}\sum_{n=0}^{N}a_n\lambda^{N-n}.$$

הביטוי האחרון מתאפס לכל t בדיוק כאשר λ הוא שורש של הפולינום האפייני.

אנו רואים כי פתרונות מ.ה דומים מאד לפתרון מ.ד.ר. הדמיון ממשיך גם כאשר אנו משתמשים במ.ה לתאור של מערכת כניסה-יציאה.

10.2 מערכות ומשוואות הפרש לינאריות

ראינו כי פתרון מ.ה תלוי גם בכניסה וגם בתנאי התחלה. בשלב זה ברצונינו להתרכז בהשפעת הכניסה. דרך אחת לעשות זאת היא על ידי בחירת תנאי התחלה אפס, כלומר התייחסות לפתרון y_{ZSR} בלבד. לדרך זו יש חסרון: אנו נאלצים לבחור זמן קבוע בו מוגדרים תנאי ההתחלה. נתגבר על כך כפי שעשינו עבור מ.ד.ר. נזכר בהגדרות 2.2.12 של אות חד צדדי ימני ואות חד צדדי שמאלי.

הגדרה 10.2.1 נאמר שמערכת המתוארת על ידי מ.ה היא במנוחה התחלתית *(Initially At Rest)* אם תגובת המערכת לאות ימני המתאפס עבור $s<t_x$ היא אפס עד תחילת הכניסה, כלומר היא מקיימת $y(s)=0$ עבור $s<t_x$.

10.2.1 תכונות וסיווג של מערכות מ.ה.

אנו מתייחסים למערכת המתוארת על ידי מ.ה כמערכת מיפוי כניסה יציאה (מערכת IOM---הגדרה 2.2.1). על פי ההגדרה 2.2.3, מ.ה מתארת מערכת דינמית בזמן בדיד. לפי הגדרה 2.2.5 זוהי מערכת SISO, ולפי הגדרה 2.2.6 זוהי מערכת בעלת זכרון (פרט למקרה המנוון בו $N = M = 0$). המערכת היא סיבתית (הגדרה 2.2.8) משום שניתן לרשום את המשוואה (10.1.1) בצורה

$$y(t) = -\sum_{n=1}^{N} a_n y(t-n) + \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \tag{10.2.1}$$

(כיוון שהנחנו $a_0 = 1$). כלומר, הערך של התגובה ברגע t תלוי רק בערכים של הכניסה בעבר ובהווה, וכן בערכי התגובה בעבר.

ניתן כמובן להגדיר משוואת הפרש לינארית שאינה סיבתית. זאת למשל על ידי ביטול הדרישה ש-$a_0 \neq 0$, או לחילופין על ידי שינוי הגבול התחתון של הסכום בצד ימין של (10.1.1) כך שיתחיל ב-$m < 0$. ראה גם סעיף 12.5.1 המתאר ייצוג שונה של משוואות הפרש.

טענה 10.2.2 מ.ה הנמצאת במנוחה התחלתית מתארת מערכת לינארית.

הוכחה: נשים לב כי סכום אותות ימניים הוא אות ימני. מהגדרת מערכת במנוחה התחלתית, תנאי ההתחלה הם אפס עבור זמן מוקדם מספיק. לכן הלינאריות נובעת מטענה 10.1.2. מ.ש.ל.

המערכת המתוארת על ידי (10.1.1) (כולל תנאי התחלה נתונים וקבועים!) היא מערכת אפינית (הגדרה 2.2.11): אם נקבע תנאי התחלה ונחשב תגובה לשני אותות כניסה, כאשר תנאי ההתחלה הם זהים, אזי ההפרש יקיים את (10.1.1) עבור תנאי התחלה אפס---וזו כידוע מערכת לינארית.

טענה 10.2.3 מ.ה הנמצאת במנוחה התחלתית מתארת מערכת קבועה בזמן.

הוכחה: נזכר בהגדרה 2.2.18. נקבע s ונשים לב כי אם x הוא אות ימני אזי גם $\sigma^s x$ הוא אות ימני. נסמן ב-$y = \Phi x$. קל לראות כי $\sigma^s y$ פותר את (10.1.1) עבור כניסה $\sigma^s x$. מ.ש.ל.

10.3 תגובה להלם של משוואות הפרש לינאריות

תגובה להלם היא בסיס לחישוב וניתוח התנהגות של מערכות, גם בזמן בדיד.

הגדרה 10.3.1 פונקצית הלם בזמן בדיד היא פונקצית הדלתה של קרונקר *Kronecker delta function* אשר תסומן ב-δ. הגדרתה היא

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{10.3.1}$$

בניגוד לפונקציית דלתה בזמן רציף, פונקצית הדלתה של קרונקר היא פונקציה רגילה לכל דבר (המושג פונקציה מוכללת אינו רלוונטי כלל לאותות בזמן בדיד).

עבור דוגמה 10.1.7 ניתן לחשב תגובה להלם בצורה הבאה. המשוואה שעלינו לפתור היא

$$y(n)+\frac{3}{2}y(n-1)+\frac{1}{2}y(n-2)=\delta(n). \tag{10.3.2}$$

נשים לב כי עבור $n\geq 1$ משוואה זו היא הומוגנית, כיוון ש- $\delta(n)=0$ עבור $n\geq 1$. לכן נשתמש בפתרון ההומוגני הכללי, ונציב בו תנאי התחלה אשר נחשב בתחום $n\geq 1$. דרושים שני תנאי התחלה, שכן $N=2$, והם כמובן

$$y(-1)=y(-2)=0. \tag{10.3.3}$$

נחשב בצורה ישירה

$$y(0)=-\frac{3}{2}y(-1)-\frac{1}{2}y(-2)+\delta(0) \tag{10.3.4}$$

$$=0+0+1=1. \tag{10.3.5}$$

$$y(1)=-\frac{3}{2}y(0)-\frac{1}{2}y(-1) \tag{10.3.6}$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot 1-0=-\frac{3}{2} \tag{10.3.7}$$

$$y(2)=-\frac{3}{2}y(1)-\frac{1}{2}y(0) \tag{10.3.8}$$

$$=-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{5}{4}\ . \tag{10.3.9}$$

עבור $n\geq 1$ צד ימין של המשוואה מתאפס (כיוון שפונקצית הדלתה שווה אפס), כלומר אנו זקוקים לפתרון הומוגני. אולם חישבנו כבר ומצאנו כי שרשי הפולינום האפייני הם $(-1,-1/2)$. לכן, עבור $n\geq 1$ נציב בפתרון ההומוגני הכללי ונשווה לתוצאות החישוב הישיר:

$$y(n)=A_1(-1)^n+A_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \tag{10.3.10}$$

$$y(1)=-A_1-\frac{1}{2}A_2=-\frac{3}{2} \tag{10.3.11}$$

$$y(2)=A_1+\frac{1}{4}A_2=\frac{5}{4}. \tag{10.3.12}$$

נשים לב כי השוויון האחרון בכל משוואה מתקיים רק עבור $n>0$, אחרת הפתרון איננו הומוגני. מחיבור שתי המשוואות האחרונות נקבל $(-1/4)A_2=-1/4$ ולכן $A_2=1$. נציב במשוואה עבור $y(1)$ ונקבל $A_1=1$. לסיכום מצאנו כי

$$h(n)=\begin{cases}(-1)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & n\geq 1\\ 1 & n=0\\ 0 & \text{אחרת.}\end{cases} \tag{10.3.13}$$

10.3.1 חישוב תגובת הלם

נרשום את מ.ה בצורה הבאה:

$$y(t) = -\sum_{n=1}^{N} a_n y(t-n) + \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m). \tag{10.3.14}$$

1. חישוב תגובת ההלם על ידי שימוש בלינאריות וקביעות בזמן.

(א) נחשב תחילה את תגובת ההלם $h_0(t)$ של המערכת

$$y(t) = -\sum_{n=1}^{N} a_n y(t-n) + x(t). \tag{10.3.15}$$

האות h_0 הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית עבור $t > 0$. לכן

(ב) נמצא את הפתרון ההומוגני הכללי למשוואה. לפתרון זה N מקדמים. על מנת למצוא אותם אנו זקוקים ל-N משוואות. לכן

(ג) נחשב, כמו בדוגמה, מתוך המשוואה את

$$y(N), y(N-1), \ldots, y(0), \tag{10.3.16}$$

בהתחשב בעובדה שתנאי ההתחלה הם $y(n) = 0$ עבור $n < 0$.

(ד) כעת נתאים את הפרמטרים של הפתרון ההומוגני הכללי לערכים שחישבנו עבור

$$y(N), y(N-1), \ldots, y(0), \tag{10.3.17}$$

על ידי כך שנרשום N משוואות הומוגניות, אשר נקבל ממשוואה (10.3.15) שנחשב בזמנים $t = 1, 2, \ldots, N$. מצאנו אם כך את $h_0(n)$.

(ה) כעת נשתמש בלינאריות ובקביעות בזמן, ונקבל

$$h(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m h_0(n-m). \tag{10.3.18}$$

2. חישוב ישיר (איזון הלמים). מייצוג המערכת במשוואה (10.3.14) ברור כי תגובת ההלם (כלומר התגובה בתנאי התחלה $y(t) = 0,\ t = -1, \ldots, -N$ כאשר $x = \delta$) מקיימת את המשוואה ההומוגנית עבור $t > M$. לפתרון ההומוגני הכללי ישנם N פרמטרים, שכן המשוואה היא מסדר N. כדי לחשב פרמטרים אלו עלינו לפתור N משוואות לינאריות. משוואות אילו נקבל מתוך N פתרונות הומוגניים של המשוואה: כלומר עלינו לרשום את המשוואה (10.3.14) עבור N הזמנים $t = M+1, \ldots .N+M$. כעת נתאים את הפרמטרים לערכים שחישבנו ומצאנו את $h(n)$.

בפרק 12 נלמד שיטה נוספת ויעילה לחשב את תגובת ההלם---דרך התמרת Z.

10.4 תגובה של מ.ה לכניסה אקספוננציאלית ותגובת תדר

האות α^t הוא אות עצמי של משוואת הפרש עבור α מרוכב, במובן שהוא מהווה פתרון פרטי. נבדוק על ידי הצבה ב-(10.1.1) כי הכניסה $x(t) = \alpha^t$ והתגובה $y(t) = H(\alpha)\alpha^t$ פותרים את משוואת ההפרשים עבור קבוע מרוכב $H(\alpha)$ כלשהוא.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{n=0}^{N} a_n H(\alpha)\alpha^{t-n} \tag{10.4.1}$$

$$= \alpha^t H(\alpha) \sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^{-n} \tag{10.4.2}$$

$$\sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) = \sum_{m=0}^{M} b_m \alpha^{t-m} \tag{10.4.3}$$

$$= \alpha^t \sum_{m=0}^{M} b_m \alpha^{-m}. \tag{10.4.4}$$

שיוויון יתקיים (לכל α) אם ורק אם

$$H(\alpha) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \alpha^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^{-n}}. \tag{10.4.5}$$

כמו בזמן רציף וכפי שנראה בהמשך, $H(\alpha)$ הוא פונקצית התמסורת. במקרה הפרטי ש-$|\alpha| = 1$ נרשום $\alpha = e^{j\Omega}$ הכניסה היא $x(t) = e^{jt\Omega}$ שהיא כניסה מחזורית אם ורק אם $\Omega = k\pi/m$ עבור שלמים כלשהם k, m. התגובה לכניסה כזו היא $y(t) = H(e^{j\Omega})e^{jt\Omega}$. הפונקציה $H(e^{j\Omega})$ היא תגובת התדר.

פרק 11

מערכות גרעין וקונוולוציה בזמן בדיד.

חזרה לשעור זה: מערכות גרעין וקונוולוציה בזמן רציף

בפרק זה נעסוק במערכות כניסה יציאה המוגדרות דרך סכום:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)x(k) \ . \tag{11.0.1}$$

הפונקציה K קובעת כמובן את התנהגות המערכת, והיא נקראת "גרעין" (kernel). נשים לב כי אם הכניסה למערכת היא דלתה מושהה $\delta(k-m)$ אזי התגובה ברגע n תהיה $K(n,m)$. לכן $K(n,m)$ הוא תגובת המערכת ברגע n לכניסת דלתה ברגע m.

כמקרה פרטי נדון במערכת קונוולוציה, שהגדרתה היא

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \ . \tag{11.0.2}$$

מערכת זאת מוגדרת על ידי קונוולוציה בין אות הכניסה לבין פונקציה h המייצגת את המערכת.

11.1 פונקצית דלתה ומערכת קונוולוציה.

נשים לב כי לכל אות בזמן בדיד g,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-k)\delta(k) = g(n) \ . \tag{11.1.1}$$

השיוויון נובע מהגדרת פונקצית הדלתה בזמן בדיד. הסכום יתן את ערך הפונקציה $g(n-k)$ כאשר $k=0$, כלומר $g(n)$. בפרט, נפעיל שוויון זה על הגדרת מערכת קונוולוציה (11.0.2) ונקבל

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)\delta(k) \, . \tag{11.1.2}$$

כלומר אם מערכת קונוולוציה מתוארת על ידי (11.0.2), אזי בהכרח הפונקציה h היא תגובת המערכת לכניסת דלתה---במילים אחרות, תגובת ההלם.

11.2 מערכות גרעין

לפי פרק 3, כל מערכת כניסה יציאה בזמן רציף שהיא לינארית ניתנת לתאור (במגבלות טכניות קלות) כמערכת גרעין. בצורה דומה, כפי שנראה בהמשך, כל מערכת כניסה יציאה בזמן בדיד שהיא לינארית ניתנת לתאור (במגבלות טכניות עליהן לא נעמוד כאן) כמערכת גרעין מהצורה

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)x(k)\,. \tag{11.2.1}$$

הפונקציה K, שהיא פונקציה ממשית (או מרוכבת) של שני משתנים ממשיים, נקראת גרעין המערכת. נעסוק במערכת SISO בלבד, למרות שניתן להרחיב בקלות את התוצאות למערכת MIMO.

משפט 11.2.1 כל מערכת גרעין, המתוארת על ידי (11.2.1) , מתארת מערכת מיפוי כניסה-יציאה לינארית.

הוכחה: המערכת היא מיפוי כניסה יציאה כיוון שלכל אות כניסה מתאים אות יציאה, המוגדר דרך המשוואה (11.2.1). נבחר כעת קבועים ואותות α, β, x_1, x_2. אזי

$$y(n) = \Phi[\alpha x_1 + \beta x_2](n) \tag{11.2.2}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)(\alpha x_1(k) + \beta x_2(k)) \tag{11.2.3}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)\alpha x_1(k)\,dt + \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)\beta x_2(k) \tag{11.2.4}$$

$$= \alpha\Phi[x_1](n) + \beta\Phi[x_2](n) \tag{11.2.5}$$

כאשר השוויון השלישי נובע מלינאריות הסכום. מ.ש.ל.

כדי להראות שזהו ייצוג כללי המתאר (כמעט) כל מערכת, נבחר מערכת כניסה יציאה לינארית כלשהי המוגדרת על ידי מפוי Φ. נגדיר פונקציה K על ידי

$$K(n,k) \doteq \Phi[\delta(\cdot - k)](n) = \Phi[\sigma^{-k}\delta](n)\,. \tag{11.2.6}$$

נייצג את הכניסה על ידי אינגרל עם פונקצית דלתה

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\,. \tag{11.2.7}$$

כיוון שהמערכת היא לינארית, לכל אוסף קבועים $\{x_i\}$ ופונקציות $\{f_i(k)\}$ מתקיים

$$\Phi\left[\sum_i x_i f_i\right](n) = \sum_i x_i \Phi[f_i](n)\,. \tag{11.2.8}$$

לכן אם נניח שהתכונה תקיפה גם לסכום אין סופי נקבל

$$y(n) = \Phi[x](n) \tag{11.2.9}$$
$$= \Phi\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(\cdot - k)\right](n) \tag{11.2.10}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\Phi[\delta(\cdot - k)](n) \tag{11.2.11}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)K(n,k)\,. \tag{11.2.12}$$

קיבלנו ייצוג של המערכת כמערכת גרעין.

הערה מתמטית: הסיבה שחישוב זה אינו "משפט" ומובא בהסתייגות היא כיוון שתכונת הלינאריות מוגדרת לסכומים עם מספר מחוברים סופי, ולא לסכום אין סופי. ואכן, ישנן מערכות לינאריות אשר לא ניתן לייצגן כמערכות גרעין, אולם הן "מערכות פתולוגיות."

פרט למיקרי קצה, מערכת גרעין היא מערכת דינמית עם זכרון.

תרגיל 11.2.2 הראה כי המערכת עם גרעין $K(n,k) = k(n)\delta(n-k)$ אינה בעלת זיכרון.

משפט 11.2.3 מערכת עם גרעין K היא סיבתית אם ורק אם $K(n,k) = 0$ לכל $k > n$.

הוכחה: אם התנאי מתקיים אזי

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n} K(n,k)x(k) \tag{11.2.13}$$

ולכן התלות בערכי $x(k)$ היא עבור $k \leq n$ בלבד. מצד שני אם התנאי אינו מתקיים אזי קיימים $S > N$ כך ש-

$$K(N,S) = \alpha \neq 0\,. \tag{11.2.14}$$

נבחר אות כניסה

$$x(k) = \begin{cases} \beta & k = S \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases} \tag{11.2.15}$$

ערך התגובה ברגע N הוא

$$y(N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(N,k)x(k) = K(N,S)\beta = \alpha\beta\,. \tag{11.2.16}$$

התגובה תלויה בערכי הכניסה בעתיד, ולכן המערכת אינה סיבתית. מ.ש.ל.

יש מערכות גרעין שהן הפיכות, אך לא כולן. למשל הגרעין $K(n,k) = 1$ נותן אותה תגובה לכל האותות אשר יש להם אותו אינטגרל, ולכן אינה הפיכה.

ברור אינטאיטיבית כי מערכת גרעין אינה קבועה בזמן, בשל התלות המפורשת בזמן n. בסעיף הבא נראה מתי מערכת גרעין היא קבועה בזמן.

11.3 מערכות קונוולוציה

מערכת קונוולוציה מוגדרת על ידי

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)\,. \tag{11.3.1}$$

זהו כמובן מקרה פרטי של מערכת גרעין, ולכן זוהי מערכת כניסה יציאה לינארית.

משפט 11.3.1 כל מערכת המתוארת על ידי (11.3.1) מתארת מערכת מיפוי כניסה-יציאה לינארית קבועה בזמן. המערכת סיבתית אם ורק אם $h(n) = 0$ לכל $n < 0$.

הוכחה: כיוון שמערכת קונוולוציה היא מקרה פרטי של מערכת גרעין, היא מיפוי כניסה יציאה לינארי. נבדוק קביעות בזמן לפי ההגדרה

$$\sigma^\tau y(n) = \sigma^\tau \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)\right] \tag{11.3.2}$$

$$= \sigma^\tau \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right] \tag{11.3.3}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\sigma^\tau x(n-k) \tag{11.3.4}$$

$$= \Phi[\sigma^\tau x](n) \tag{11.3.5}$$

כאשר השוויון השני נובע מתכונות הקונוולוציה (בדומה לזמן רציף: ראה פרק 11.4) והשלישי מההגדרה של σ. התנאי לסיבתיות נובע ממשפט 11.2.3 כיוון ש-$K(m,k) = h(m-k)$. **מ.ש.ל.**

נשים לב כי בהתאם לתנאי המשפט, מערכת עבורה $h = \delta$ היא סיבתית: ואכן במקרה זה $y = h * x = x$ והמערכת אכן סיבתית.

מצד שני, מערכת גרעין קבועה בזמן היא בהכרח מערכת קונוולוציה:

משפט 11.3.2 יהי K גרעין של מערכת קבועה בזמן. נגדיר $h(n) \doteq K(n,0)$, אזי לכל x,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)\,. \tag{11.3.6}$$

הוכחה: מההגדרה,

$$\Phi\left[\sigma^{-\tau}\delta\right](n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)\delta(k-\tau) = K(n,\tau)\,. \tag{11.3.7}$$

מהקביעות בזמן נובע כי

$$\Phi\left[\sigma^{-\tau}\delta\right](n) = \sigma^{-\tau}\Phi\left[\delta\right](n) \tag{11.3.8}$$

$$= \sigma^{-\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)\delta(k) \tag{11.3.9}$$

$$= \sigma^{-\tau}K(n,0) \tag{11.3.10}$$

$$= K(n-\tau,0)\,. \tag{11.3.11}$$

משתי המשוואות נובע כי $K(n,\tau) = K(n-\tau, 0)$ והמשפט הוכח. **מ.ש.ל.**

לא כל מערכת קונוולוציה היא הפיכה: נוח יהיה לנתח נושא זה בעזרת התמרות, ולכן נדחה את הדיון. כיוון שמערכות קונוולוציה הן חשובות לנו, נקדיש זמן לחזרה והעמקה של פעולת הקונוולוציה ותכונותיה.

11.4 קונוולוציה.

הגדרה 11.4.1 פעולת קונוולוציה בזמן בדיד בין שתי פונקציות מוגדרת כך

$$(f*g)(n) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)\,.$$

לפעולת הקונוולוציה התכונות הבאות.

קומוטטיביות (סדר המשתנים אינו חשוב), כלומר

$$f*g = g*f\,. \tag{11.4.1}$$

הוכחה: נרשום את ההגדרה. בעזרת החלפת משתנים $k' = n-k$

$$(f*g)(n) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k) \tag{11.4.2}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k')g(k') \tag{11.4.3}$$

$$\doteq (g*f)(n)\,. \tag{11.4.4}$$

אסוציאטיביות (כלומר מיקום הסוגריים בשרשרת קונוולוציות):

$$(f*g)*h = f*(g*h)\,. \tag{11.4.5}$$

ההוכחה היא תרגיל בהחלפת משתנים.

קונוולוציה היא פעולה לינארית: מלינאריות הסכום נובע מיד כי

$$f*(\alpha g + \beta h) = \alpha f*g + \beta f*h\,. \tag{11.4.6}$$

לכל g,

$$(\delta * g)(n) = g(n).$$

תכונות נוספות של הקונוולוציה: הזזה

$$(f*\sigma^{-\tau}\delta)(n) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)\delta(k-\tau)\,ds \tag{11.4.7}$$

$$= f(n-\tau) \tag{11.4.8}$$

המשמעות היא שניתן לבטא הזזה בעזרת קונוולוציה: $\sigma^{-\tau}f = f*\sigma^{-\tau}\delta$.

הייצוג של הזזת זמן דרך קונוולוציה עם הזזת דלתה נותן את התוצאה החשובה הבאה.

משפט 11.4.2 פעולת הקונוולוציה מתחלפת עם הזזה בזמן, כלומר

$$(\sigma^\theta f)*g = \sigma^\theta(f*g) = f*\sigma^\theta g\,. \tag{11.4.9}$$

הוכחה: מהייצוגים שהראינו והאסוציאטיביות של הקונוולוציה,

$$(\sigma^\theta f)*g = ((\sigma^\theta\delta)*f)*g \tag{11.4.10}$$

$$= (\sigma^\theta\delta)*(f*g) \tag{11.4.11}$$

$$= f*((\sigma^\theta\delta)*g)\,. \tag{11.4.12}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בקומוטטיביות. מהיצוג של הזזה על ידי קונוולוציה עם דלתה נובע כי הזזה בזמן מתחלפת עם קונוולוציה. **מ.ש.ל.**

כדי לחשב קונוולוציות בצורה ישירה חשוב לעיתים לדעת מתי התוצאה מתאפסת.

משפט 11.4.3 נניח ש-f, g הן שני אותות המתאפסים מחוץ לאינטרוולים, כלומר

$$f(n) = 0 \ for\ n \notin [a,b], \tag{11.4.13}$$

$$g(n) = 0 \ for\ n \notin [c,d]\,. \tag{11.4.14}$$

אזי

$$(f*g)(n) = 0 \ for\ t \notin [a+c, b+d]\,. \tag{11.4.15}$$

הוכחה: נחשב

$$(f*g)(n) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)\,. \tag{11.4.16}$$

אם $n < a+c$ נבדוק מה קורה בכל תחום של k. אם $k < a$ אזי $f(k)=0$ ולכן אין תרומה לסכום. מצד שני אם $k > a$ אזי $n-k < a+c-a < c$ ואז $g(n-k)=0$ ושוב אין תרומה לסכום. ההוכחה לגבי הגבול העליון זהה. **מ.ש.ל.**

11.4.1 מ"ה ומערכות קונוולוציה

ראינו כי מ"ר במנוחה התחלתית היא מערכת לינארית וקבועה בזמן. לכן ניתן להציג אותה כמערכת קונוולו-ציה. את תגובת ההלם ניתן לחשב במספר שיטות: על ידי איזון הלמים, או על ידי חישוב הפתרון ההומוגני. שיטות אלו יועברו בתרגיל.

11.4.2 תגובת מערכת קונוולוציה לאות אקספוננציאלי

אות אקספוננציאלי הוא "אות עצמי" של מערכות לינאריות קבועות בזמן (לק"ב). כלומר, אם הכניסה למערכת לק"ב היא אות מהצורה $x(n) = z^n$ (כאשר z הוא מספר מרוכב), אזי התגובה גם היא אות מאותה צורה, כלומר התגובה תהיה $H(z)z^n$ עבור קבוע מרוכב $H(z)$. ואכן

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \tag{11.4.17}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{(n-k)}h(k) \tag{11.4.18}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^n z^{-k}h(k) \tag{11.4.19}$$

$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k}h(k) \tag{11.4.20}$$

$$= z^n H(z). \tag{11.4.21}$$

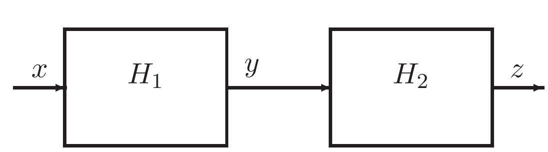
והגענו לתוצאה כי התגובה היא קבוע (כלומר גודל שאינו תלוי בזמן) כפול אות הכניסה. קבוע זה תלוי בפרמטר f, ומהחישוב למעלה

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k}h(k)\ . \tag{11.4.22}$$

גודל זה נקרא פונקצית התמסורת של המערכת, ונלמד עליה בפירוט בפרק 12.

11.5 חיבור מערכות

נחזור כעת לדון בחיבור מערכות. נניח תחילה שאנו מחברים בטור שתי מערכות גרעין: כיוון שמדובר



איור 11.1: חיבור מערכות בטור

במערכות גרעין נוכל לבטא זאת בנוסחאות בצורה הבאה.

$$y(k) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} K_1(k,u)x(u) \tag{11.5.1}$$

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_2(n,k)y(k) \tag{11.5.2}$$

ולכן

$$z(n) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(K_2(n,k)\left[K_1(k,u)x(u)\right]\right) \tag{11.5.3}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} K_1(n,k)K_2(k,u)\right) x(u) \tag{11.5.4}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{\infty} K(n,u)x(u) \tag{11.5.5}$$

כאשר הגרעין של המערכת הכוללת נתון על ידי

$$K(n,u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_1(n,k)K_2(k,u)\,. \tag{11.5.6}$$

עבור מערכות קונוולוציה נקבל

$$z(n) = (x * h_1 * h_2)(n) \tag{11.5.7}$$

$$= (x * (h_1 * h_2))(n) \tag{11.5.8}$$

ומכאן, או ישירות דרך התוצאות למערכות גרעין,

$$z(n) = (h * x)(n) \tag{11.5.9}$$

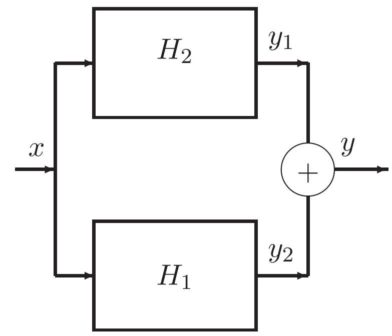
$$h = h_1 * h_2\,. \tag{11.5.10}$$

חיבור במקביל של שתי מערכות הוא פשוט יותר. עבור החיבור הקשר בין כניסה ליציאה במערכת גרעין מתואר על ידי

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) \tag{11.5.11}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_1(n,k)x(k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_2(n,k)x(k) \tag{11.5.12}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(K_1(n,k) + K_2(n,k)\right) x(k) \tag{11.5.13}$$



איור 11.2: חיבור מערכות במקביל

ולכן

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K(n,k)x(k) \tag{11.5.14}$$

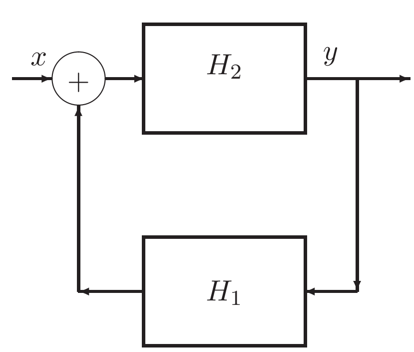
$$K(n,s) = K_1(n,k) + K_2(n,k)\,. \tag{11.5.15}$$

עבור מערכת קונוולוציה נקבל

$$y(n) = (h * x)(n) \tag{11.5.16}$$

$$h = h_1 + h_2\,. \tag{11.5.17}$$

אם כך, נראה שתיאור מערכות על ידי גרעין נותן תשובה לחיבור מערכות. ברור שניתן לנתח בצורה דומה (ופשוטה!) גם חיבורים מורכבים יותר. אולם אחד החיבורים הבסיסיים בתורת המערכות הוא חיבור משוב, המשורטט להלן: נסיון לנתח מערכת כזאת המורכבת משתי מערכות קונוולוציה, תוך שימוש באותן



איור 11.3: חיבור משוב

שיטות כמו עבור חיבור בטור או במקביל מוביל לנוסחה

$$y = (x + y * h_1) * h_2 \tag{11.5.18}$$

שהיא נוסחה סתומה, אשר לא ברור כיצד ניתן לחלץ ממנה את y ולתאר את התלות שלו ב- x. בהמשך נראה כי בעזרת שיטות התמרה קל לנתח מערכת זאת.

פרק 12

התמרת Z

ראינו בסעיף 10.4 כי אות אקספוננציאלי α^t הוא אות עצמי של משוואת הפרש עבור α מרוכב, במובן שהכניסה $x(t) = \alpha^t$ והתגובה $y(t) = H(\alpha)\alpha^t$ פותרים את משוואת ההפרשים עבור קבוע מרוכב $H(\alpha)$ כלשהוא. קבוע זה נתון על ידי

$$H(\alpha) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \alpha^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n \alpha^{-n}}. \tag{12.0.1}$$

בסעיף 11.4.2 ראינו כי באופן כללי יותר, אות אקספוננציאלי הוא אות עצמי של מערכת לינארית קבועה בזמן. את התגובה לכניסה אקספוננציאלית אפשר במקרה זה לכתוב כ- $y(t) = H(\alpha)\alpha^t$ כאשר

$$H(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{-k} h(k) \; . \tag{12.0.2}$$

בטוי זה מזכיר בצורתו את התמרת לפלס. הכלי המתמטי המקביל להתמרת לפלס, המתאים לאותות ומערכות בזמן בדיד, נקרא התמרת Z. כמו התמרת לפלס, גם כאן ההתמרה הדו צדדית מתאימה לטיפול במערכות כניסה יציאה, ולצורך התחשבות בהשפעה של תנאי התחלה יש צורך בהתמרה חד צדדית.

לפני שנדון בהתמרה, נזכר בהגדרות של מרחבי אותות מסעיף 4.1. לאותות בזמן בדיד נשתמש בהגדרה הבאה.

הגדרה 12.0.1 עבור פונקציות (ממשיות או מרוכבות) ועבור כל $p \geq 1$ נגדיר נורמת l_p כך:

$$||x||_p \doteq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} , \tag{12.0.3}$$

$$||x||_\infty \doteq \sup_k \{|x(k)|\} \; . \tag{12.0.4}$$

המרחב (אוסף הפונקציות) l_p מוגדר כאוסף הפונקציות עבורן הנורמה המתאימה סופית, כלומר

$$l_p = \{x : ||x||_p < \infty\} \; . \tag{12.0.5}$$

לכל $p \geq 1$ המרחב l_p הוא מרחב ליניארי עם נורמה. בפרט, המרחב l_∞ הוא אוסף האותות החסומים, l_1 הוא אוסף האותות (פונקציות) הסכימים בהחלט. המרחב l_2 הוא אוסף הפונקציות בעלות אנרגיה סופית, ועבורו (ורק עבור $p = 2$!) ניתן להגדיר מכפלה פנימית

$$\langle x, y \rangle \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y^*(k) \tag{12.0.6}$$

כאשר y^* הוא הצמוד המרוכב של y. הנורמה קשורה למכפלה הפנימית דרך $\langle x, x \rangle = ||x||_2^2$.

12.1 התמרה דו צדדית

התמרת Z מוגדרת לאותות בזמן בדיד, תחת תנאי טכני בדומה להתמרת לפלס. התמרת Z דו צדדית משמשת כלי חשוב לניתוח מערכות כניסה-יציאה ליניאריות וקבועות בזמן.

הגדרה 12.1.1 התמרת Z דו-צדדית של אות x מוגדרת עבור ערכים של המשתנה המרוכב z עבורם

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k) z^{-k}| < \infty \, . \tag{12.1.1}$$

ואז ההתמרה היא

$$\boxed{X(z) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \, .} \tag{12.1.2}$$

תחום ההגדרה, או תחום ההתכנסות (*ROC: Region Of Converngence*) הוא אוסף הערכים של z עבורם ההתמרה מוגדרת, כלומר עבורם מתקיים אי השוויון (12.1.1). נסמן את הקשר בין x להתמרה X כך:

$$x \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X \, , \quad X(z) = \mathcal{Z}[x](z) \, . \tag{12.1.3}$$

כמו התמרת לפלס, התמרת Z מוגדרת על ידי צמד נתונים: הפונקציה $X(z)$ ותחום ההתכנסות. ללא ידיעת תחום ההתכנסות לא נוכל לשחזר את $x(n)$ מתוך ידיעת $X(z)$.

למעשה התמרה זו ניתן לייצוג דרך התמרת לפלס. בהנתן אות $x(n)$ בזמן בדיד נגדיר אות המייצג אותו בזמן רציף דרך הלמים:

$$x_c(t) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(t-k) \, . \tag{12.1.4}$$

משפט 12.1.2 $X_c(s) = \mathcal{L}[x_c](s) = X(z)|_{z=e^s} = \mathcal{Z}[x](z)|_{z=e^s}$.

הוכחה: מההגדרה נקבל

$$X_c(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-st} \, dt \tag{12.1.5}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-sk} \tag{12.1.6}$$

$$= \mathcal{Z}[x](z)|_{z=e^s} \, . \tag{12.1.7}$$

מ.ש.ל.

דוגמה 12.1.3 כמובן שלאות $x(n) \equiv 3$ אין התמרת Z כיוון שתחום ההתכנסות אינו כולל שום z. נחשב התמרה של האות הימני $x(n) = a^n u(n)$ כאשר u היא מדרגה בזמן בדיד:

$$u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n > 0\,. \end{cases} \tag{12.1.8}$$

אם $a = 1$ אזי x הוא מדרגה וההתמרה היא

$$U(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) z^{-k} \tag{12.1.9}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\,. \tag{12.1.10}$$

סכום זה מוגדר היטב אם ורק אם $|z| > 1$. עבור a כללי

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \tag{12.1.11}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \tag{12.1.12}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k\,. \tag{12.1.13}$$

טור זה מתכנס אם $|a/z| < 1$, ולכן תחום ההתכנסות של ההתמרה הוא $\{z : |z| > |a|\}$. כלומר, עבור אות זה תחום ההתכנסות הוא מחוץ למעגל במישור המרוכב. עבור z בתחום ההתכנסות,

$$X(z) = \frac{1}{1 - a/z} \tag{12.1.14}$$

$$= \frac{z}{z - a} \qquad |z| > |a|\,. \tag{12.1.15}$$

דוגמה 12.1.4 כעת נבחר אות שמאלי

$$x(n) = -a^n u(-n-1)\,. \tag{12.1.16}$$

לפי ההגדרה

$$X(z) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{12.1.17}$$
$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} \tag{12.1.18}$$
$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{a}{z}\right)^k \tag{12.1.19}$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k \tag{12.1.20}$$
$$= -\frac{z}{a}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^k \tag{12.1.21}$$
$$= -\frac{z}{a}\frac{1}{1-z/a} \tag{12.1.22}$$
$$= \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a|\,. \tag{12.1.23}$$

במקרה זה האות שונה מאפס עבור ערכים שליליים של הזמן בלבד. לכן הסכום יתכנס אם ורק אם $|z| < |a|$, כלומר תחום ההתכנסות לאות שמאלי זה הוא בתוך מעגל במישור המרוכב.

קיבלנו אם כן שהצורה הפונקציונלית של ההתמרה עבור שני אותות שונים היא זהה: כדי לשחזר את האות במישור הזמן אנו חייבים לדעת מהו תחום ההתכנסות.

דוגמה 12.1.5 עבור האות הדו צדדי $x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n-1)$ נקבל בחישוב ישיר (או תוך שימוש בלינאריות של הסכום)

$$X(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b} \tag{12.1.24}$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא התחום בו שתי ההתמרות מוגדרות, כלומר $|a| < |z| < |b|$. מכאן נובע מיד כי ההתמרה מוגדרת רק אם $|a| < |b|$.

כדי לנתח את תחום ההתכנסות באופן כללי נרשום את המשתנה z בקואורדינטות פולריות: $z = re^{j\theta}$, כאשר r הוא גודל חיובי. את תנאי ההתכנסות אפשר לכן לרשום בצורה

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)z^{-k}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|r^{-k} \tag{12.1.25}$$
$$< \infty\,. \tag{12.1.26}$$

לכן תחום ההתכנסות תלוי רק בערך המוחלט של z או, במילים אחרות, תחום ההתכנסות מוגדר על ידי מעגלים במישור המרוכב. כמו בהתמרת לפלס נקבל את התכונות הבאות:

משפט 12.1.6 לתחום ההתכנסות התכונות הבאות:

1. תחום ההתכנסות מוגדר דרך עיגולים במישור המרוכב.

2. עבור אות ימני תחום ההתכנסות הוא מחוץ למעגל.

3. עבור אות שמאלי תחום ההתכנסות הוא הפנים של מעגל---יתכן שלא כולל את הנקודה $z = 0$.

4. עבור סדרה דו צדדית תחום ההתכנסות הוא טבעת.

5. עבור אות עם תמך סופי תחום ההתכנסות הוא כל z, כאשר אם האות שונה מאפס עבור $n < 0$ כלשהוא אזי תחום זה אינו כולל את הנקודה 0.

6. תחום ההתכנסות אינו כולל קטבים של ההתמרה.

הוכחה: נוכיח רק כי תחום ההתכנסות לאות ימני הוא מחוץ למעגל. כיוון שהאות ימני קיים N כך ש-$x(n) = 0$ עבור $n < N$. נניח תחילה כי $N \geq 0$. נניח שהנקודה $z = r_0$ נמצאת בתחום ההתכנסות, ונבחר $r > r_0$. אזי

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)||z|^{-k} \tag{12.1.27}$$

$$= \sum_{k=N}^{\infty} |x(k)|r_0^{-k} \tag{12.1.28}$$

$$\geq \sum_{k=N}^{\infty} |x(k)|r^{-k} \tag{12.1.29}$$

כלומר גם r בתחום ההתכנסות. אם $N < 0$ נשנה את החישוב כך:

$$\infty > \sum_{k=N}^{\infty} |x(k)|r_0^{-k} \tag{12.1.30}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|r^{-k} \tag{12.1.31}$$

ובנוסף מתקיים

$$\sum_{k=N}^{-1} |x(k)|r^{-k} < \infty \tag{12.1.32}$$

ולכן גם r הוא בתחום ההתכנסות.

נשים לב כי אם $x(n) \neq 0$ עבור $n > 0$ כלשהו, אזי 0 אינו יכול להיות בתחום ההתכנסות. לכן עבור אות שמאלי $0 \in ROC$ אמ"מ $x(n) = 0$ לכל $n > 0$. **מ.ש.ל.**

12.2 התמרה חד צדדית

הגדרה 12.2.1 התמרת Z חד-צדדית של אות x מוגדרת עבור ערכים של המשתנה המרוכב z עבורם

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)z^{-k}| < \infty\,. \tag{12.2.1}$$

ואז ההתמרה היא

$$X_+(z) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \,. \tag{12.2.2}$$

תחום ההגדרה, או תחום ההתכנסות (*ROC: Region Of Converngence*) הוא אוסף הערכים של z עבורם ההתמרה מוגדרת, כלומר עבורם מתקיים אי השוויון (12.2.1). נסמן את הקשר בין x להתמרה X_+ כך:

$$x \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} X_+ \;, \quad X_+(z) = \mathcal{Z}_+[x](z) \,. \tag{12.2.3}$$

כיוון שהתמרה חד צדדית היא התמרה דו צדדית של אות ימני, תחום ההתכנסות הוא תמיד מחוץ למעגל.

12.3 תכונות ההתמרה

בסעיף זה "התמרה" מתייחסת לשתי ההתמרות---דו וחד צדדית---אלא אם כן נאמר במפורש אחרת.

משפט 12.3.1 ההתמרה היא פעולה לינארית, כלומר

$$\alpha x + \beta y \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \alpha X + \beta Y \tag{12.3.1}$$

ותחום הקיום מכיל לפחות את $ROC_x \cap ROC_y$.

הוכחה: נובע מיידית מלינאריות הסכום. מ.ש.ל.

תחום ההתכנסות של סכום יכול כמובן להיות גדול מחיתוך תחומי ההתכנסות.

משפט 12.3.2 להתמרה דו צדדית, $x * y \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z)Y(z)$. תחום ההתכנסות מכיל לפחות את $ROC_x \cap ROC_y$. אם x ו-y הם אותות ימניים אזי $x * y \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} X_+(z)Y_+(z)$.

הוכחה: לפי הגדרת ההתמרה והקונוולוציה,

$$\mathcal{Z}(x*y)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k) \right] z^{-n} \tag{12.3.2}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) z^{-n} \right] \tag{12.3.3}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k) z^{-(n-k)} \right] \tag{12.3.4}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m) z^{-m} \right] \tag{12.3.5}$$

$$= X(z) Y(z) \,. \tag{12.3.6}$$

החישוב תקף כמובן אם z נמצא בתחום ההתכנסות של שתי ההתמרות.

אם x ו-y הם אותות ימניים אזי $x * y$ הוא אות ימני ולכן התוצאה נובעת מההוכחה הקודמת. מ.ש.ל.

משפט 12.3.3 הזזת זמן. ההתמרה (הדו-צדדית) של דלתה מוזזת היא $\delta(n-m) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} z^{-m}$.
התמרה (דו צדדית) של אות מוזז:

$$x(n-m) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} z^{-m}X(z)\,. \tag{12.3.7}$$

תחום ההתכנסות הוא ללא שינוי, פרט אולי לנקודה $z=0$.
עבור אותות ימניים ו-$m \geq 0$ התוצאות נכונות גם להתמרה חד צדדית. באופן כללי, עבור אות שאינו מתאפס עבור זמנים שליליים נקבל עבור $m>0$

$$x(n+m) \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} z^{m}X_+(z) - \sum_{k=0}^{m-1} z^{m-k}x(k) \tag{12.3.8}$$

$$x(n-m) \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} z^{-m}X_+(z) + \sum_{k=1}^{m} z^{-(m-k)}x(-k)\,. \tag{12.3.9}$$

הוכחה:

$$\delta(n-m) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-m)z^{-k} \tag{12.3.10}$$

$$= z^{-m} \tag{12.3.11}$$

$$x(n-m) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-m)z^{-k} \tag{12.3.12}$$

$$= z^{-m}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-m)z^{-(k-m)} \tag{12.3.13}$$

$$= z^{-m}X(z)\,. \tag{12.3.14}$$

ההתמרה החד צדדית של δ מחושבת בצורה זהה.
עבור אות ימני ו-$m>0$,

$$x(n-m) \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m)z^{-k} \tag{12.3.15}$$

$$= z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} x(k-m)z^{-(k-m)} \tag{12.3.16}$$

$$= z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{12.3.17}$$

$$= z^{-m}X_+(z) \tag{12.3.18}$$

כאשר השוויון הלפני אחרון מתקיים כיוון ש-$x(k-m)=0$ עבור $k<m$. לאות כללי (לא בהכרח ימני) ו-$m>0$,

$$x(n+m) \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m) z^{-k} \tag{12.3.19}$$

$$= z^m \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m) z^{-(k+m)} \tag{12.3.20}$$

$$= z^m \sum_{l=m}^{\infty} x(l) z^{-l} \tag{12.3.21}$$

$$= z^m \left[\sum_{l=0}^{\infty} x(l) z^{-l} - \sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l} \right] \tag{12.3.22}$$

$$= z^m X_+(z) - z^m \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \tag{12.3.23}$$

$$= z^m X_+(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{m-k}, \tag{12.3.24}$$

ובצורה דומה,

$$x(n-m) \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m) z^{-k} \tag{12.3.25}$$

$$= z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m) z^{-(k-m)} \tag{12.3.26}$$

$$= z^{-m} \left[\sum_{k=m}^{\infty} x(k-m) z^{-(k-m)} + \sum_{k=0}^{m-1} x(k-m) z^{-(k-m)} \right] \tag{12.3.27}$$

כעת נציב באיבר השמאלי $l=k-m$ ובסכום הימני $p=m-k$ ונקבל

$$= z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} x(l) z^{-l} + z^{-m} \sum_{p=1}^{m} x(-p) z^{p} \tag{12.3.28}$$

$$= z^{-m} X_+(z) + \sum_{k=1}^{m} x(-k) z^{-(m-k)}. \tag{12.3.29}$$

מ.ש.ל.

משפט 12.3.4 $x(-n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(1/z)$.

אם x הוא אות ממשי אזי

$$X(z^*) = X(z)^*, \quad X_+(z^*) = X_+(z)^*. \tag{12.3.30}$$

הוכחה:

$$x(-n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)z^{-k} \tag{12.3.31}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{k} \tag{12.3.32}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left(\frac{1}{z}\right)^{-k} \tag{12.3.33}$$

$$=X\left(\frac{1}{z}\right) . \tag{12.3.34}$$

אם x ממשי

$$[X(z)]^* = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}\right]^* \tag{12.3.35}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[x(k)z^{-k}\right]^* \tag{12.3.36}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(z^*)^{-k} . \tag{12.3.37}$$

השיויון האחרון נובע מכך ש-x הוא ממשי. מ.ש.ל.כמובן שאין שום קשר בין ההתמרה החד צדדית של $\{x(n),\ n \geq 0\}$ לבין ההתמרה החד צדדית של $\{x(-n),\ n \geq 0\}$.

משפט 12.3.5 הכפלה באקספוננט: להתמרה חד ודו צדדית

$$a^n x(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z/a) \tag{12.3.38}$$

ותחום ההתכנסות הוא $z/a \in ROC_x$.

הוכחה:

$$a^n x(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k x(k)z^{-k} \tag{12.3.39}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left(\frac{z}{a}\right)^{-k} \tag{12.3.40}$$

$$=X(z/a) . \tag{12.3.41}$$

מ.ש.ל.

משפט 12.3.6 גזירה ב-z:

$$-nx(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} z\frac{dX(z)}{dz} . \tag{12.3.42}$$

הוכחה:

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{d}{dz}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{12.3.43}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\frac{d}{dz}z^{-k} \tag{12.3.44}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(-k)z^{-1}z^{-k} \tag{12.3.45}$$

$$= z^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} [-kx(k)]z^{-k} \tag{12.3.46}$$

$$= z^{-1}\mathcal{Z}[-nx(n)](z)\,. \tag{12.3.47}$$

מ.ש.ל.

דוגמה 12.3.7 נחשב את התמרת $\mathcal{Z}$ של $na^n u(n)$.

$$na^n u(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-a}\right] \tag{12.3.48}$$

$$= \frac{az}{(z-a)^2} \qquad\qquad |z| > |a|\ . \tag{12.3.49}$$

משפט 12.3.8 משפט הערך ההתחלתי:

$$x(0) = \lim_{|z|\to\infty} X_+(z)\,. \tag{12.3.50}$$

משפט הערך הסופי: אם הגבול השמאלי קיים אזי

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X_+(z)\,. \tag{12.3.51}$$

הוכחה: לשני המקרים, ניתן תחילה הסבר אינטואיטיבי, ולאחריו הוכחה מתמטית מדויקת. לפי ההגדרה

$$X_+(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots\ . \tag{12.3.52}$$

כאשר $z \to \infty$ כל האברים למעט הראשון שואפים לאפס ולכן

$$\lim_{|z|\to\infty} X_+(z) = x(0)\,. \tag{12.3.53}$$

בצורה יותר פורמלית,

$$X_+(z) = x(0) + \frac{1}{z}f(z) \tag{12.3.54}$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z^{-k+1} \tag{12.3.55}$$

$$|f(z)| = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|\cdot|z^{-k+1}| \tag{12.3.56}$$

והביטוי האחרון סופי עבור z גדול כיוון שהנחנו שההתמרה קיימת והאות הוא ימני. בנוסף, הביטוי האחרון קטן כאשר $|z|$ גדל. לכן כאשר $|z|$ שואף ל-∞ נקבל את $x(0)$ כנדרש.
להוכחת הערך הסופי נרשום שוב, מתוך ההגדרה,

$$(z-1)X_+(z) = zX_+(z) - X_+(z) \tag{12.3.57}$$
$$= z[x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\ldots] - [x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\ldots] \tag{12.3.58}$$
$$= zx(0)+x(1)+x(2)z^{-1}+\ldots \tag{12.3.59}$$
$$-x(0)-x(1)z^{-1}-x(2)z^{-2}+\ldots \tag{12.3.60}$$
$$= zx(0)+[x(1)-x(0)]+[x(2)-x(1)]z^{-1}+[x(3)-x(2)]z^{-2}+\ldots\ . \tag{12.3.61}$$

לכן

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X_+(z) = x(0)+[x(1)-x(0)]+[x(2)-x(1)]+[x(3)-x(2)]+\ldots \tag{12.3.62}$$
$$= [x(0)-x(0)]+[x(1)-x(1)]+\ldots+\lim_{n\to\infty}x(n) \tag{12.3.63}$$
$$= \lim_{n\to\infty}x(n)\,. \tag{12.3.64}$$

טיעון זה דורש הוכחה כי ניתן להחליף את הסדר בין הסכום (האין-סופי) לבין הגבול כאשר $z\to 1$. נראה כעת הוכחה פורמלית יותר. נזכר כי לפי ההנחה קיים הגבול $x(\infty)$ ולכן, בהנתן $\varepsilon>0$ נוכל לבחור N גדול מספיק כך ש-

$$|x(n)-x(\infty)|<\varepsilon \tag{12.3.65}$$

לכל $n>N$. נרשום כעת

$$(z-1)X_+(z) = (z-1)\sum_{k=0}^{N}x(k)z^{-k} + (z-1)\sum_{k=N+1}^{\infty}x(k)z^{-k} \tag{12.3.66}$$
$$\to (1-1)\sum_{k=0}^{N}x(k)1^{-k} + \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\sum_{k=N+1}^{\infty}x(k)z^{-k}\right] \tag{12.3.67}$$
$$= 0+\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\sum_{k=N+1}^{\infty}x(\infty)z^{-k} + (z-1)\sum_{k=N+1}^{\infty}[x(k)-x(\infty)]z^{-k}\right]. \tag{12.3.68}$$

האיבר השני נותן את הגבול הרצוי כיוון ש-

$$\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\sum_{k=N+1}^{\infty}x(\infty)z^{-k}\right] = \lim_{z\to 1}\left[x(\infty)(z-1)z^{-(N+1)}\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}\right] \tag{12.3.69}$$
$$= \lim_{z\to 1}\left[x(\infty)(z-1)z^{-(N+1)}\frac{1}{1-z^{-1}}\right] \tag{12.3.70}$$
$$= \lim_{z\to 1}\left[x(\infty)(z-1)z^{-(N+1)}\frac{1}{1-z^{-1}}\right] \tag{12.3.71}$$
$$= \lim_{z\to 1}\left[x(\infty)z^{-(N+1)}\frac{(z-1)z}{z-1}\right] \tag{12.3.72}$$
$$= x(\infty)\,. \tag{12.3.73}$$

נשים לב כי ההנחה שהגבול במשפט קיים מבטיחה כי ההתמרה קיימת עבור $z > 1$. עבור z כזה האיבר השלישי מקיים

$$\left|\lim_{z\to 1}(z-1)\sum_{k=N+1}^{\infty}[x(k)-x(\infty)]z^{-k}\right| = \lim_{z\to 1}(z-1)\sum_{k=N+1}^{\infty}|[x(k)-x(\infty)]|z^{-k} \tag{12.3.74}$$

$$\le \lim_{z\to 1}(z-1)\varepsilon\sum_{k=N+1}^{\infty}z^{-k} \tag{12.3.75}$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)\varepsilon z^{N+1}\frac{z}{z-1} \tag{12.3.76}$$

$$= \varepsilon\,. \tag{12.3.77}$$

כיוון ש-ε קטן באופן שרירותי, ההוכחה הושלמה. מ.ש.ל.

12.4 התמרה הפוכה

השיטה הפשוטה ביותר לביצוע התמרה הפוכה היא על ידי פירוק לשברים חלקיים, כפי שעשינו עבור התמרת לפלס, ושימוש בהתמרות אשר כבר חישבנו. לא נחזור על התאוריה ונסתפק בדוגמה.

דוגמה 12.4.1

$$X(z) = \frac{3z^2-\frac{5}{2}z}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}} \tag{12.4.1}$$

$$= z\frac{3z-\frac{5}{2}}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}} \tag{12.4.2}$$

$$= \frac{2z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z-1}\ . \tag{12.4.3}$$

בהנחה שמדובר באות ימני, תחום ההתכנסות יהיה מחוץ למעגל המוגדר על ידי הקוטב הגדול ביותר, כלומר $|z| > 1$.
בזכות הלינאריות, ולפי הדוגמה הקודמת,

$$x(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+u(n)\ . \tag{12.4.4}$$

כמובן שניתן לקבל מספר ביטויים שונים; אם נתחיל בחילוק ארוך נקבל

$$X(z) = 3+\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{z-1} \tag{12.4.5}$$

$$x(n) = 3\delta(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+u(n-1) \tag{12.4.6}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+u(n)\ . \tag{12.4.7}$$

כמובן שהתוצאה זהה.

כפי שראינו עבור התמרת לפלס, אם נוכל להציג את ההתמרה כטור בחזקות של z אזי אפשר "לקרוא" את המקדמים ישירות מהטור, והמקדמים הם ערכי האות. לדוגמה

$$X(z) = \log\left(1 + \frac{a}{z}\right) \ . \tag{12.4.8}$$

כאשר מדובר באות ימני. על ידי פיתוח לטור טיילור נקבל

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(az^{-1}\right)^k && (12.4.9) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} -\frac{(-1)^k}{k} a^k u(k-1) z^{-k} && (12.4.10) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} && (12.4.11) \end{aligned}$$

ומכאן

$$x(n) = -\frac{(-1)^n}{n} a^n u(n-1) \ . \tag{12.4.12}$$

נכיר כעת שיטות אנליטיות לחישוב ההתמרה ההפוכה. נניח בשלב זה כי תחום ההתכנסות כולל את המעגל $|z| = 1$. ניתן במקרה זה לחשב את ההתמרה ההפוכה בצורה הבאה. נרשום עבור $|z| = 1$

$$z = e^{j\theta} \, . \tag{12.4.13}$$

לפי ההגדרה ההתמרה היא

$$X\left(e^{j\theta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-jk\theta} \ . \tag{12.4.14}$$

זוהי פונקציה מחזורית במשתנה θ עם מחזור 2π, והביטוי הוא בדיוק טור פוריה של פונקציה זו. משיקול זה, או ישירות מתכונת הניצבות של האותות $e^{jk\theta}$ במרחב $L_2[0, 2\pi]$ נקבל

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X\left(e^{j\theta}\right) e^{jn\theta} \, d\theta \, . \tag{12.4.15}$$

נטפל כעת במקרה בו מעגל היחידה אינו בתחום ההתכנסות. נבחר נקודה כלשהיא z_0 בתחום ההתכנסות ונרשום $z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$. אזי המעגל $z = r_0 e^{j\theta}$ הוא בתחום ההתכנסות, וניתן לרשום את ההתמרה בצורה

$$X\left(r_0 e^{j\theta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) r_0^{-k} e^{-jk\theta} \ . \tag{12.4.16}$$

כמו במקרה הקודם, עבור r_0 קבוע זוהי פונקציה מחזורית במשתנה θ ונקבל

$$\begin{aligned} x(n) r_0^{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X\left(r_0 e^{j\theta}\right) e^{jn\theta} \, d\theta && (12.4.17) \\ x(n) &= r_0^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X\left(r_0 e^{j\theta}\right) e^{jn\theta} \, d\theta \, . && (12.4.18) \end{aligned}$$

למעשה נוסחה זו שקולה לחישוב שנקבל ממשפט השארית. נזכר כי משפט השארית Residue מראה כי

$$\frac{1}{j2\pi}\oint z^{p-1}\,dz = \begin{cases} 1 & p=0 \\ 0 & p\neq 0\,. \end{cases} \tag{12.4.19}$$

מהגדרת התמרת Z,

$$X(z)z^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k+n-1} \tag{12.4.20}$$

ולכן ממשפט השארית אם נבצע אינטגרל על מעגל הנמצא בתחום ההתכנסות נקבל

$$\oint X(z)z^{n-1}\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\oint z^{-k+n-1}\,dz \tag{12.4.21}$$

$$= j2\pi x(n) \tag{12.4.22}$$

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint X(z)z^{n-1}\,dz\;. \tag{12.4.23}$$

נוסחה זו שקולה ל-(12.4.18) כפי שניתן לראות על ידי שינוי משתנים $z = r_0e^{j\theta}$.

12.5 פתרון משוואות הפרש

ב-(10.1.1) הגדרנו משוואת הפרשים ליניארית

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \tag{12.5.1}$$

נזכר באופרטור ההזזה

$$\sigma x(t) = x(t+1) \tag{12.5.2}$$

כאשר, מחמת ריבוי האינדקסים, חזרנו להשתמש ב-t בתור משתנה הזמן. ממשפט 12.3.3 נקבל

$$\mathcal{Z}[\sigma^{-m}x](z) = z^{-m}X(z) \tag{12.5.3}$$

נבצע תחילה התמרה דו צדדית על מנת לחקור את משוואת המצב כמערכת כניסה יציאה. נרשום את משוואת ההפרש בצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\sigma^{-n}y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m\sigma^{-m}x(t) \tag{12.5.4}$$

$$Q(\sigma)y(t) = P(\sigma)x(t) \tag{12.5.5}$$

וממשוואה (12.5.3) נקבל

$$Q(z)Y(z) = P(z)X(z) \tag{12.5.6}$$

$$Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}X(z) \tag{12.5.7}$$

ופונקצית התמסורת היא

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{12.5.8}$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}}\,. \tag{12.5.9}$$

אם אנו משתמשים במשוואת ההפרשים כדי לתאר מערכת סיבתית אזי תחום ההתכנסות יהיה עבור z מחוץ למעגל, והמעגל מוגדר על ידי הקוטב (שורש של פולינום המכנה לאחר צימצום עם שורשי פולינום המונה) הגדול ביותר.

כדי לקחת בחשבון את תנאי ההתחלה עלינו להשתמש בהתמרה חד צדדית. ממשפט 12.3.3 נקבל

$$\mathcal{Z}[\sigma^{-m}x](z) = z^{-m}X_+(z) + \sum_{k=1}^{m} z^{-(m-k)}x(-k)\,. \tag{12.5.10}$$

נעבור באותה דרך כמו עבור ההתמרה הדו צדדית. לאחר אלגברה נקבל

$$Y_+(z) = H(z)X_+(z) + \frac{\text{פולינום בתנאי ההתחלה של } x \text{ ושל } y}{Q(z)}\,. \tag{12.5.11}$$

האיבר הראשון הוא ההתמרה החד צדדית של y_{ZSR}, התגובה בתנאי החלה אפס, והאיבר השני הוא ההתמרה החד צדדית של y_{ZIR}, התגובה בכניסה אפס. נשים לב כי הפתרון בתנאי התחלה אפס הוא לינארי בכניסה, ואילו הפתרון בכניסה אפס הוא לינארי בתנאי ההתחלה.

דוגמה 12.5.1 משוואת פיבונצ'י היא

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n) \tag{12.5.12}$$

$$y(0) = 0,\ \ y(1) = 1\,. \tag{12.5.13}$$

זוהי משוואה ללא כניסה. בעזרת התמרה חד צדדית נקבל

$$y(n+1) \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} zY_+(z) - zy(0) \tag{12.5.14}$$

$$y(n+2) \overset{\mathcal{Z}_+}{\leftrightarrow} z[zY_+(z) - zy(0)] - zy(1) \tag{12.5.15}$$

$$= z^2Y_+(z) - z^2y(0) - zy(1) \tag{12.5.16}$$

$$Y_+(z) = \frac{z^2y(0) + zy(1) - zy(0)}{z^2 - z - 1} \tag{12.5.17}$$

$$= \frac{z}{z^2 - z - 1} \tag{12.5.18}$$

$$= \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)} \tag{12.5.19}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \tag{12.5.20}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \tag{12.5.21}$$

$$Y_+(z) = \frac{1}{z_1 - z_2}\left[\frac{z}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2}\right] \tag{12.5.22}$$

כיוון ש-$z_1 - z_2 = \sqrt{5}$ נקבל

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(z_1^n - z_2^n\right) u(n) \tag{12.5.23}$$

$$= \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}\,. \tag{12.5.24}$$

נשים לב כי צורת הרישום שלנו של משוואת ההפרשים נותנת מערכת סיבתית בתנאי ש-$a_0 \neq 0$. אולם הקשר שפיתחנו בין המשוואה וההתמרה אינו תלוי בתכונה זו. לסיכום,

משפט 12.5.2 משוואת הפרשים ניתן לפתור בעזרת התמרת Z, אם לאות הכניסה יש התמרת Z.

הוכחה: עלינו להוכיח כי תחת התנאים, כל פתרון אפשרי של משוואת הפרשים (סיבתית), עם תנאי התחלה כלשהם, הוא אות אשר יש לו התמרת Z עבור z גדול מספיק. אם זה נכון, אזי ניתן לחשב את הפתרון בעזרת התמרת Z. אולם מייצוג הפתרון ברור כי אם לאות הכניסה יש התמרה אזי יש פתרון עבור התגובה, פונקציה של המשתנה z. בנוסף, ממשפט 10.1.1 למשוואת ההפרש קיים פתרון יחיד. כיוון שהתמרת Z נותנת פתרון, הרי זהו הפתרון (היחיד) של המשוואה. מ.ש.ל.

12.5.1 קטבים ושרשים

נחזור לצורה (12.5.1) של משוואת ההפרשים. לפי הגדרה 10.1.6 הפולינום האפייני של משוואה זו הוא

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^{N-n}\,. \tag{12.5.25}$$

מצד שני, כאשר הפעלנו התמרת Z על משוואת ההפרש קיבלנו שהפולינום הקשור להשהיות של התגובה y הוא

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} = z^{-N} \sum_{n=0}^{N} a_n z^{N-n}\,. \tag{12.5.26}$$

לכן, בדיוק כמו בזמן רציף (הקשר בין שרשי הפולינום האפייני והתמרת לפלס), כל קטבי פונקציית התמ-סורת הם שורשים של הפולינום האפייני, ויתכן שורש שאינו קוטב רק אם יש צמצום של קטבים ואפסים. את ההקבלה לזמן רציף נראה ביתר בהירות אם נתבונן בייצוג אחר של משוואת הפרש. נתבונן במשוואה

$$\sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n \sigma^n y(t) = \sum_{m=0}^{M} \tilde{b}_m \sigma^m x(t) \tag{12.5.27}$$

כאשר σ הוא אופרטור ההזזה $\sigma r(t) = r(t+1)$. נשים לב כי התמרת Z דו צדדית למשוואה זו נותנת

$$\sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n z^n Y(z) = \sum_{m=0}^{M} \tilde{b}_m z^m X(z) \tag{12.5.28}$$

ולכן המכנה של פונקצית התמסורת

$$\sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n z^n \tag{12.5.29}$$

מתקבל בצורה נוחה יותר בחזקות חיוביות של z, וצורתו זהה לחלוטין לצורה בזמן רציף (למעט ההחלפה מהאות s לאות z). דמיון זה מאפשר ניתוח אחיד לזמן רציף ובדיד. מסיבה זו וכן בגלל הגישה המסורתית, כאשר נטפל בייצוג מצב (פרק 15 סעיף 15.7) נייצג את משוואות ההפרש בצורה (12.5.27). באופן כללי, הייצוג (12.5.1) מקובל יותר בתחום עיבוד האותות, בעוד שהייצוג (12.5.27) הוא המקובל בתחום הבקרה.

התאור (12.5.27) שונה מ-(12.5.1) בצורה שאינה טריוואלית. למשל, בייצוג (12.5.1) אם $a_0 \neq 0$) אזי המערכת סיבתית. לעומת זאת בייצוג (12.5.27) נקבל, כמו בזמן רציף, שהבחירה $N > M$ גורמת להתנהגות שונה---במקרה זה המערכת אינה סיבתית. כמובן שהייצוגים הם שקולים---המעבר ביניהם הוא בצורה הבאה. נתחיל בצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \tag{12.5.30}$$

נסמן $L = \max\{N, M\}$. נזיז את ציר הזמן ב-L ונקבל

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t+L-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t+L-m) \tag{12.5.31}$$

כעת נחליף משתנים: $l = L - n$ ו-$k = L - m$ ונקבל

$$\sum_{l=L-N}^{L} a_{L-l}\, y(t+l) = \sum_{k=L-M}^{L} b_{L-k}\, x(t+k)\ . \tag{12.5.32}$$

לכן אפשר לעבור מהתאור (12.5.1) לצורה (12.5.27) בצורה הבאה. עבור $l \geq L-N$ ועבור $k \geq L-M$ נגדיר

$$\tilde{a}_l = a_{L-l} \qquad \tilde{b}_k = b_{L-k}\ . \tag{12.5.33}$$

נשים לב כי אם $N = \max\{N, M\} = L$ אזי $L = N$, ובצורה דומה כאשר M הוא הגדול משניהם. נגדיר אם כן

$$\tilde{a}_l = 0\,, \quad 0 \leq l < L-N\,, \qquad \tilde{b}_k = 0\,, \quad 0 \leq k < L-M\ . \tag{12.5.34}$$

נציב כעת את ההגדרות (12.5.33)--(12.5.34) במשוואה (12.5.32) ובכך רשמנו את המשוואה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \tag{12.5.35}$$

בצורה שקולה כ-

$$\sum_{l=0}^{L} \tilde{a}_l y(t+l) = \sum_{k=0}^{L} \tilde{b}_k x(t+k)\ . \tag{12.5.36}$$

אפשר כמובן לעבור בצורה דומה בכוון ההפוך.

נשים לב כי אם אורך הזכרון של הכניסה והיציאה שונה אזי בייצוג האחרון חלק מהמקדמים יהיה אפס. לעומת זאת בייצוג הראשון, כדי לייצג מערכת שאינה סיבתית אנו חייבים להגדיר

$$a_n = 0 \quad 0 \leq n \leq N' \tag{12.5.37}$$

עבור $N' > 0$ כלשהו.

12.6 מערכת קונוולוציה

הגדרנו מערכת קונוולוציה דרך משוואה (11.0.2):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \, . \tag{12.6.1}$$

ראינו כי h היא תגובת ההלם של מערכת כניסה-יציאה זו. התמרת Z דו צדדית של המשוואה ושימוש בתכונות ההתמרה נותנים מייד

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{12.6.2}$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} \, . \tag{12.6.3}$$

ממשפט 11.3.1 נובע כי תגובת ההלם של מערכת סיבתית היא אות ימני. אם כך

משפט 12.6.1 תהי h תגובת ההלם של מערכת סיבתית, ונניח ש-$H(z)$ קיימת עבור z כלשהוא. אזי

$$\sup_{|z|\geq r_0} |H(z)| < \infty \, . \tag{12.6.4}$$

עבור r_0 כלשהו. בנוסף, אם התנאי מתקיים אזי המערכת סיבתית.

אנו יודעים כי תחום ההתכנסות של אות ימני הוא מחוץ למעגל: נתאר את מסקנת המשפט על ידי כך שנאמר שתחום ההתכנסות כולל את האינסוף.

הוכחה: אם שהמערכת סיבתית, תגובת ההלם היא ימנית כלומר

$$|H(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \right| \tag{12.6.5}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \left| z^{-k} \right| \, , \tag{12.6.6}$$

והביטוי האחרון סופי עבור z בתחום ההתכנסות, ויורד כאשר $|z|$ גדל כיוון שהוא מכיל רק חזקות שליליות של $|z|$. מצד שני, אם המערכת אינה סיבתית אזי הטור המגדיר את התמרת Z מכיל חזקות חיוביות של z. חישוב דומה מראה כי במקרה זה הסכום אינו יכול להיות חסום. מ.ש.ל.

פרק 13

יציבות מערכות בזמן בדיד

נושא היציבות הוא מרכזי לתורת המערכות, ובעל חשיבות רבה בכל צדדיו כולל עיבוד אותות. נושא היציבות בזמן בדיד דומה בהגדרותיו, בכלים ובתוצאות לנושא בזמן רציף. לכן הטיפול כאן יהיה תמציתי יותר.

13.1 יציבות כניסה חסומה-יציאה חסומה

למערכות קונוולוציה בזמן בדיד יש שיטה לבדיקת יציבות BIBO. נזכר בהגדרת הנורמה l_1 והנורמה l_∞--- הגדרה 12.0.1.

משפט 13.1.1 תהי Φ מערכת קונוולוציה עם תגובת הלם h. אזי המערכת יציבה $BIBO$ אם ורק אם תגובת ההלם שלה מקיימת

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty\,. \tag{13.1.1}$$

כלומר אם ורק אם h נמצאת ב-l_1. אם התנאי מתקיים אזי $||\Phi[x]||_\infty \leq ||h||_1 \cdot ||x||_\infty$.

הוכחה: נניח תחילה כי h שייכת ל-l_1. יהי x אות חסום כלשהו. עלינו להראות כי התגובה אליו חסומה. ואכן

$$|y(t)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(t-k)\right| \tag{13.1.2}$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)x(t-k)| \tag{13.1.3}$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \sup_n |x(n)| \tag{13.1.4}$$

$$= ||h||_1 \cdot ||x||_\infty\,. \tag{13.1.5}$$

לכן $||y||_\infty \leq ||h||_1 \cdot ||x||_\infty$ והתנאי מתקיים וכן מתקיים אי השוויון האחרון שבטענה.

כדי להוכיח את הכיוון השני נניח שהתנאי אינו מתקיים, כלומר

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty \tag{13.1.6}$$

ונרצה למצוא אות חסום x כך ש- $||\Phi(x)||_\infty = \infty$. נגדיר

$$x(t) = \begin{cases} 1 & h(-t) \geq 0 \\ -1 & h(-t) < 0\,. \end{cases} \tag{13.1.7}$$

בסימון אחר, $x(t) = \operatorname{sign}(h(-t))$. נראה כי $y(0) = \infty$ ולכן y אינו אות חסום. נחשב

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(-k)x(k) \tag{13.1.8}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(-k)| \tag{13.1.9}$$

$$= \infty\,. \tag{13.1.10}$$

מ.ש.ל.

למעשה קבלנו תוצאה חזקה יותר מההגדרה: עבור מערכת קונוולוציה, יציבות BIBO שקולה לתנאי כי קיים קבוע B עבורו

$$||y||_\infty \leq B \cdot ||x||_\infty \tag{13.1.11}$$

והקבוע B נתון על ידי $B = ||h||_1$. בפרט מכאן נובע כי אם x הוא אות קטן (במובן ש-$||x||_\infty$ הוא קטן), אזי התגובה של המערכת קטנה.

ניתן לנסח תוצאה זו בעזרת התמרת Z.

משפט 13.1.2 פונקצית תמסורת H של מערכת בזמן בדיד מתארת מערכת יציבה $BIBO$ אם ורק אם מעגל היחידה הוא בתחום התכנסות של H.

אם פונקצית התמסורת מתארת משוואת הפרשים סיבתית אזי תנאי שקול הוא שכל הקטבים הם ממש בתוך מעגל היחידה.

הוכחה: מעגל היחידה הוא בתחום ההתכנסות אם ורק אם

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||z^{-k}| < \infty \tag{13.1.12}$$

כאשר $|z| = 1$. זהו בדיוק התנאי ש- $h \in l_1$.

אם פונקצית התמסורת מתארת משוואת הפרשים סיבתית אזי תחום ההתכנסות הוא מחוץ למעגל, משום שתגובת ההלם היא אות ימני, והמעגל מוגדר על ידי הקוטב הגדול ביותר. כדי שמעגל היחידה יהיה בתחום ההתכנסות על כל הקטבים להיות בעלי גודל ממש קטן יותר, כלומר בתוך מעגל היחידה. מ.ש.ל.

לפי משפט זה ניתן לקבוע יציבות BIBO של משוואת הפרש על ידי ניתוח הקטבים: כלומר שרשי הפולינום האפייני, לאחר ביטול אותם שורשים המצטמצמים עם השרשים של צד ימין של משוואת ההפרשים. נשים לב כי בניגוד לתנאים על משוואה דיפרנציאלית, סדר פולינום המונה והמכנה של משוואת הפרש אינו משפיע על היציבות. זאת משום שנגזרת של אות חסום אינה בהכרח חסומה, בעוד שהפרשים של אות חסום הם תמיד חסומים.

ניתן להרחיב חלק מתנאי היציבות למערכות גרעין.

משפט 13.1.3 מערכת גרעין היא יציבה אם

$$\sup_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} |K(n,k)| < \infty \,. \tag{13.1.13}$$

תנאי זה מספיק ליציבות אך אינו הכרחי.

הוכחה: אם התנאי מתקיים אזי

$$|y(t)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |K(t,k)| \sup_n |x(n)| \,. \tag{13.1.14}$$

מ.ש.ל.

13.2 יציבות אסימפטוטית

נזכר כי מערכת מ"ה מתוארת דרך משוואה (10.1.1)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \,. \tag{13.2.1}$$

נזכר בהגדרת יציבות אסימפטוטית:

הגדרה 13.2.1 מערכת מ"ה נקראת יציבה אסימפטוטית אם התגובה בכניסה אפס y_{ZIR} מקיימת

$$y_{ZIR}(t) \to 0 \tag{13.2.2}$$

כאשר $t \to \infty$, וזאת לכל תנאי התחלה.

נזכר כי המכנה של המשוואה עבור התמרת $\mathcal{Z}$ של תגובת ZIR הוא

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} \tag{13.2.3}$$

ושורשי Q הם הפתרונות של המשוואה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} = 0 \,. \tag{13.2.4}$$

משפט 13.2.2 מערכת מ"ה היא יציבה אסימפטוטית אם ורק אם כל שורשי Q הם בתוך מעגל היחידה, כלומר מקיימים

$$|z| < 1 \,. \tag{13.2.5}$$

הוכחה: נזכר כי לפי משפט 10.1.8 הפתרון ההומוגני, ובפרט y_{ZIR} מורכבים מסכום של איברים מהצורה $t^k z_i^t u(t)$. כל אחד מהאברים הללו מקיים $t^k z_i^t u(t) \to 0$ כאשר $t \to \infty$ אם ורק אם $|z_i| < 1$. מ.ש.ל.

פרק 14

פוריה בזמן בדיד

ראינו בסעיף 10.4 כי אות אקספוננציאלי α^t הוא אות עצמי של משוואת הפרש עבור α מרוכב, ובפרט שהכניסה $x(n) = e^{j\Omega n}$ והתגובה $y(t) = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$ פותרים את משוואת ההפרשים, ומתקיים

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\Omega m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-j\Omega n}}. \tag{14.0.1}$$

כלומר, קיבלנו תגובת תדר (תגובה לכניסה הרמונית). חשוב לשים לב כי בניגוד לזמן רציף, כניסה הרמונית אינה בהכרח מחזורית.

משפט 14.0.3 האות $e^{j\Omega n}$ הוא מחזורי אם ורק אם $\Omega/(2\pi)$ הוא מספר רציונלי, כלומר מנה של שני שלמים.

הוכחה: האות הוא מחזורי אם ורק אם קיים מספר שלם N כך ש-

$$e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n}e^{j\Omega N}, \tag{14.0.2}$$

כלומר $e^{j\Omega N} = 1$ כלומר $\Omega N = 2\pi M$ עבור שלם כלשהו M. מכאן נובע כי $\Omega/(2\pi) = M/N$ כלומר זהו מספר רציונלי. מ.ש.ל.

14.1 התמרת פוריה בזמן בדיד

התמרת פוריה של אות בזמן בדיד (DTFT: Discrete Time Fourier Transform) מוגדרת לכל ערך (ממשי) של Ω:

הגדרה 14.1.1 התמרת פוריה של אות בזמן בדיד $\{x(n)\}$ מוגדרת בתנאי ש-

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty\,. \tag{14.1.1}$$

כלומר, בתנאי שתחום ההתכנסות של התמרת Z כולל את מעגל היחידה. בתנאי זה

$$X(\Omega) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega k}x(k) \tag{14.1.2}$$

מוגדר לכל Ω ממשי.

נסמן את הקשר בין x להתמרה X כך:

$$x \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X\ ,\quad X(\Omega) = \mathcal{F}[x](\Omega)\,. \tag{14.1.3}$$

נשים לב כי הסימונים המקובלים מטעים: מהשוואת ההגדרות של התמרת פוריה והתמרת Z נקבל מייד כי

$$X_f(\Omega) = X_z(z)|_{z=e^{j\Omega}} = X_z(e^{j\Omega})\ . \tag{14.1.4}$$

למרות זאת אנו משתמשים בסימון X גם עבור התמרת פוריה וגם עבור התמרת $\mathcal{Z}$, כאשר הכוונה תהיה ברורה מההקשר (ואם לא אזי נבהיר לאיזו פונקציה אנו מתכוונים).

משפט 14.1.2 הפונקציה $X(\Omega)$ היא מחזורית (במשתנה התדר Ω) עם מחזור 2π.

הוכחה: נובע מייד מההגדרה. פונקציה הרמונית $e^{-j\Omega n}$ היא מחזורית שכן

$$e^{-j(\Omega+2\pi)n} = e^{-j\Omega n}e^{-j2\pi n} = e^{-j\Omega n} \tag{14.1.5}$$

כיון ש-n שלם. לכן

$$X(\Omega+2\pi) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega+2\pi)k}x(k) \tag{14.1.6}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega k}x(k) \tag{14.1.7}$$

$$= X(\Omega)\,. \tag{14.1.8}$$

מ.ש.ל.

כדי להבין תופעה זו נחשוב על אות הרמוני בזמן רציף. אנו מתעניינים בערכיו בזמנים שלמים בלבד. המשמעות של הגדלת התדר ב-2π היא שהאות ההרמוני בזמן רציף מבצע מחזור נוסף של תנודות במשך יחידת זמן. אולם אנו בודקים רק את הערכים בזמנים שלמים, ולכן לתנודה הנוספת אין משמעות.

לתופעה זו של הופעת אות הרמוני דגום בתדר גבוה המשכפל אות בתדר נמוך יותר קוראים aliasing.

כיוון ש-$X(\Omega)$ היא פונקציה מחזורית של משתנה רציף (Ω), אפשר לייצג אותה על ידי טור פוריה. ואכן, (14.1.2) הוא בדיוק טור פוריה אשר מקדמיו הם $x(k)$. בדואליות זו נשתמש בהמשך.

כיוון שהתמרת פוריה בזמן בדיד היא מקרה פרטי של התמרת $\mathcal{Z}$, היא יורשת את רוב תכונותיה. נצטט אם כך את המשפטים הרלוונטיים: ההוכחות זהות לאלו אשר בסעיף 12.3.

משפט 14.1.3 ההתמרה היא פעולה לינארית, כלומר

$$\alpha x + \beta y \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \alpha X + \beta Y\,. \tag{14.1.9}$$

משפט 14.1.4 $x * y \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\Omega)Y(\Omega)$.

משפט 14.1.5 התמרה של דלתה מוזזת $\delta(n-m) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\Omega m}$.

התמרה של אות מוזז:

$$x(n-m) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\Omega m} X(\Omega)\,. \tag{14.1.10}$$

אם לאות x יש התמרת פוריה אזי גם לאות המוזז יש התמרת פוריה.

הוכחה: צריך רק להראות את הטענה האחרונה, אך היא נובעת ישירות מההגדרה. **מ.ש.ל.**

משפט 14.1.6 $x(-n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(-\Omega)$.

אם x הוא אות ממשי אזי

$$X(-\Omega) = X(\Omega)^*\,. \tag{14.1.11}$$

נובע מכך כי לאות ממשי, ידיעת הספקטרום עבור $0 \le \Omega \le \pi$ מספיקה (נזכור כי $X(\Omega)$ הוא מחזורי עם מחזור של 2π).

הוכחה: נובע מתכונות התמרת Z כיוון ש-$e^{j\Omega} = \left(e^{-j\Omega}\right)^*$. **מ.ש.ל.**

משפט 14.1.7 הכפלה באקספוננט:

$$e^{j\Omega_0 n} x(n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0)\,. \tag{14.1.12}$$

הוכחה: ישירות מההגדרה. **מ.ש.ל.**

משפט 14.1.8 גזירה ב-Ω:

$$n x(n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}\,. \tag{14.1.13}$$

הוכחה: נשים לב כי בניגוד להתמרת $\mathcal{Z}$, הגזירה כאן היא לפי Ω ולא לפי המשתנה z, ולכן התוצאות שונות בקבוע. כמובן שאת התוצאה הנוכחית אפשר לקבל מתכונת הגזירה ב-z והפעלת כלל השרשרת. אך נוכיח זאת ישירות:

$$\frac{d}{d\Omega} X(\Omega) = \frac{d}{d\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\Omega k} \tag{14.1.14}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \frac{d}{d\Omega} e^{-j\Omega k} \tag{14.1.15}$$

$$= -j \sum_{k=-\infty}^{\infty} k x(k) e^{-j\Omega k}\,. \tag{14.1.16}$$

מ.ש.ל.

בדומה לזמן רציף, גם כאן מתקיים משפט פרסוול.

משפט 14.1.9 משפט פרסוול: אם ל-x ול-y יש התמרת פוריה (ואחד האינטגרלים להלן מוגדר היטב) אזי

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)Y^*(\Omega)\,d\Omega\ . \tag{14.1.17}$$

ובפרט אם $x=y$ נקבל

$$\|x\|_2^2 \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega\ . \tag{14.1.18}$$

הוכחה: כיוון ש-$X(\Omega)$ הוא טור פוריה, נוכל לקבל תוצאה זו באופן מיידי מתכונות טור פוריה, ובפרט ממשפט 7.1.1. אך נוכיח זאת בצורה שלמה. האותות $\{e^{jk\Omega}\}$ הם אורתוגונליים, כלומר

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-j\Omega k}e^{j\Omega n}\,d\Omega = \delta(n-k) \tag{14.1.19}$$

כאשר δ כאן היא הדלתה של קרונקר. מכאן נובע כי

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)Y^*(\Omega)\,d\Omega &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\Omega k}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\Omega n}\right)^* d\Omega && (14.1.20)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\Omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y^*(n)e^{j\Omega n}\,d\Omega && (14.1.21)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(x(k)y^*(n)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-j\Omega k}e^{j\Omega n}\,d\Omega\right) && (14.1.22)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) && (14.1.23)
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.

14.1.1 התמרת פוריה הפוכה

לצורך התמרה הפוכה אפשר להשתמש בשיטות של סעיף 12.4 כגון פירוק לשברים חלקיים, הצגת ההתמרה כטור חזקות וכו'. בפרט, הנוסחה האנליטית (12.4.15) היא

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{jn\Omega}\,d\Omega\,. \tag{14.1.24}$$

14.1.2 משוואות הפרש

כמו ב-12.5 שבפרק על התמרת Z, עבור משוואת ההפרשים הלינארית (10.1.1)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(t-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(t-m) \tag{14.1.25}$$

נקבל

$$Y(\Omega) = \frac{P(\Omega)}{Q(\Omega)} X(\Omega) \tag{14.1.26}$$

$$= H(\Omega)X(\Omega) \tag{14.1.27}$$

$$H(\Omega) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\Omega m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\Omega n}} \ . \tag{14.1.28}$$

כלומר נקבל את תגובת התדר של המערכת המתוארת על ידי משוואות ההפרש, כאשר ההנחה היא שה-מערכת נמצאת במנוחה התחלתית.

14.1.3 מערכת קונוולוציה

הגדרנו מערכת קונוולוציה דרך משוואה (11.0.2):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) \ . \tag{14.1.29}$$

ראינו כי h היא תגובת ההלם של מערכת כניסה-יציאה זו. התמרת פוריה של המשוואה ושימוש בתכונות ההתמרה נותנים מייד

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \tag{14.1.30}$$

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k} \ . \tag{14.1.31}$$

14.1.4 פוריה בזמן בדיד ורציף

קיים קשר בין התמרת פוריה בזמן בדיד של אות דגום לבין התמרת פוריה של האות הרציף. נתון אות רציף x אשר נדגם במרווח דגימה T_s. נסמן $x_s(n) \doteq x(nT_s)$.

לפי ההגדרה, התמרת פוריה בזמן בדיד של האות הדגום היא

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n)e^{-j\omega n T_s}. \tag{14.1.32}$$

נחשב כעת את התמרת פוריה של האות הרציף, מוכפל ברכבת הלמים w_{T_s} (ראה משפט הדגימה):

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)e^{-j\omega t}\,dt \tag{14.1.33}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n)e^{-j\omega n T_s} \tag{14.1.34}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n)e^{-j\Omega n}. \tag{14.1.35}$$

כאשר השתמשנו בסימון $\Omega = \omega \cdot T_s$. הביטוי האחרון הוא בדיוק $X(\Omega)$. כלומר הקשר בין משתנה התדר בהתמרת פוריה לבין משתנה התדר בהתמרה בזמן בדיד הוא $\Omega = \omega \cdot T_s$. מצד שני ראינו כשלמדנו על דגימה ושיחזור כי

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right\} = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega - n\omega_s). \tag{14.1.36}$$

אם נשווה את שני הביטויים האחרונים עם הנוסחה הראשונה נקבל את הקשר

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega - n\omega_s)\ , \quad \Omega = \omega \cdot T_s \tag{14.1.37}$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{\Omega}{T_s} - n\frac{2\pi}{T_s}\right) \tag{14.1.38}$$

כלומר התמרת פוריה בזמן בדיד של האות הדגום מתקבלת משיכפולים מוזזים של התמרת פוריה של האות המקורי. ברור גם מכאן שההתמרה היא מחזורית ב-Ω עם מחזור 2π.

14.2 טור פוריה בזמן בדיד

טור פוריה בזמן בדיד מוביל להתמרה הנקראת DFT: Discrete Fourier Transform. כמו בזמן רציף, טור פוריה עוסק באותות על מרווח זמן סופי שאורכו N (או, בצורה שקולה, באותות מחזוריים עם מחזור N). נקבע אם כן אות $\{x(t) : 0 \le t \le N-1\}$. נרצה לייצג אות זה על ידי טור עם תדר בסיסי $\Omega_0 = 2\pi/N$ כאשר ההרמוניות הגבוהות הן $k\Omega_0$. הייצוג שאנו מחפשים הוא מהצורה

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{a}_k e^{jk\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}\ . \tag{14.2.1}$$

אולם ראינו כי אות הרמוני הוא תמיד מחזורי עם מחזור 2π, כלומר

$$\begin{aligned} e^{jk\left[\frac{2\pi}{N}\right]t} &= e^{jk\left[\frac{2\pi}{N}\right]t + j2\pi t} \\ &= e^{j\left[k\frac{2\pi}{N} + \frac{2\pi}{N}\cdot N\right]t} \\ &= e^{j[k+N]\frac{2\pi}{t}}\ . \end{aligned}$$

לכן אין צורך בסכום אינסופי: נרשום את (14.2.1) על ידי סכום כפול

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{a}_k e^{jk\left[\frac{2\pi}{N}\right]t} \tag{14.2.2}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{a}_{lN+k}e^{j(lN+k)\left[\frac{2\pi}{N}\right]t} \tag{14.2.3}$$

אולם בגלל המחזוריות

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{a}_{lN+k}\right)e^{jk\left[\frac{2\pi}{N}\right]t} \tag{14.2.4}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{jk\left[\frac{2\pi}{N}\right]t} \tag{14.2.5}$$

כאשר a_k מוגדר דרך הסכום האין-סופי. לסיכום קיבלנו את טור פוריה בזמן בדיד בצורה של סכום סופי

$$x(t)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}\ .$$

כלומר טור פוריה של אות בזמן בדיד בעל N ערכים שונים מוגדר על ידי N תדרים ו-N מקדמים בלבד.

נשים לב כי תכונת האורתוגנליות שאנו מכירים בזמן רציף תקפה גם כאן.

טענה 14.2.1 לכל שלם k_1 מתקיים

$$\sum_{t=0}^{N-1} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}=\begin{cases} N & k_1 \ mod\ N=0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כלומר הסכום מתאפס אלא אם כן k_1 הוא כפולה שלמה של N. ואכן אם k_1 הוא כפולה שלמה של N אזי כל המחוברים שווים 1. אחרת שהסכום מתאפס.

הוכחה: כיוון ש- $e^{2\pi k}=1$ לכל k שלם, נקבל מייד שאם $k_1=0,\pm N,\pm 2N,\ldots$ אזי

$$\sum_{t=0}^{N-1} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}=\sum_{t=0}^{N-1} 1=N\ . \tag{14.2.6}$$

אם k_1 אינו כפולה שלמה של N אזי מתוך הנוסחה לטור גאומטרי סופי,

$$\sum_{t=0}^{N-1} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}=\frac{1-e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]N}}{1-e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]}} \tag{14.2.7}$$

$$=\frac{1-e^{jk_1 2\pi}}{1-e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]}} \tag{14.2.8}$$

$$=0\ . \tag{14.2.9}$$

נביא הוכחה נוספת מפורשת, אשר נותנת יותר אינטואיציה לתוצאה זו. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{N-1} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t} &= \sum_{t=1}^{N} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}e^{-jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]} \\ &= \left[\sum_{t=0}^{N-1} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}+\left(e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]N}-e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]N\cdot 0}\right)\right]e^{-jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]}.\end{aligned}$$

כיוון ש-k_1 שלם,

$$e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]N}=e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]N\cdot 0}=1\ .$$

קבלנו לכן כי

$$\sum_{t=0}^{N-1} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}=\sum_{t=0}^{N-1} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}e^{-jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]} \tag{14.2.10}$$

כיוון שהנחנו ש-k_1 אינו כפולה של N נובע כי

$$e^{-jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]} \neq 1$$

ולכן שוויון ב-(14.2.10) יתכן רק אם

$$\sum_{t=0}^{N-1} e^{jk_1\left[\frac{2\pi}{N}\right]t} = 0 \ .$$

מ.ש.ל.

את תכונת האורטוגונליות נוכל לנצל כדי לחשב את מקדמי טור פוריה.

משפט 14.2.2 את מקדמי טור פוריה נקבל על ידי

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{N}t} \ . \tag{14.2.11}$$

הוכחה: נרשום את האות x כטור

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{N}t} &= \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{jm\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}t} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_m \left(\sum_{t=0}^{N-1}\left[e^{jm\left[\frac{2\pi}{N}\right]t}\right]e^{-jk\frac{2\pi}{N}t}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_m N\delta(m-k) \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \\
&= a_k \ .
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.

פרק 15

מערכות במרחב המצב

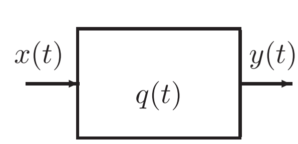
חזרה לקראת פרק זה: יש לחזור על מערכות המתוארות על ידי מ.ד.ר, מטריצות כולל ליכסון והיפוך מטריצות.

תאור מערכת על ידי משוואות מצב הוא תאור בעל תכונות יחודיות, כאשר בהגדרה המצב אוגר את כל המידע הרלוונטי אודות העבר. כיוון שכך, אם ידוע המצב של המערכת ברגע t_0 אזי חישוב תגובת המערכת ברגע $t > t_0$ דורש רק ידיעה של הכניסה בתחום $t_0 \leq s \leq t$. המידע לגבי הכניסה בעבר $s \leq t_0$ מסוכם על ידי ערך המצב ב-t_0. לדוגמה, נתבונן במשוואה הדיפרנציאלית

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 4y = x\,. \tag{15.0.1}$$

מתכונות מד"ר (פרק 2) אנו יודעים כי אם ידועים תנאי התחלה $y(t_0), \dot{y}(t_0)$ ברגע t_0 כלשהו וידועה הכניסה עבור $t \geq t_0$ אזי ניתן לפתור את המשוואה, כלומר לחשב את המוצא y לכל $t \geq t_0$. אם כן, בדוגמה זו המצב הוא הזוג (או הווקטור) $[y, \dot{y}]$.

מערכת מצב כוללת אם כן בנוסף למשתנה כניסה ומשתנה תגובה (או מוצא) גם משתנים פנימיים, הנקראים משתני מצב state variables.



איור 15.1: מערכת מצב

הגדרה 15.0.3 מערכת עם כניסה x ותגובה y נקראת מערכת מצב והווקטור q נקרא וקטור המצב של המערכת אם

1. לכל t_0, ערכי המצב העתידיים $\{q(t),\ t \geq t_0\}$ נקבעים באופן יחיד על ידי המצב הנוכחי $q(t_0)$ וערכי הכניסה העתידיים $\{x(t),\ t \geq t_0\}$.

2. יציאת המערכת היא פונקציה חסרת זכרון של המצב ושל הכניסה: $y(t) = g(q(t), x(t), t)$.

כפי שנראה בהמשך, לייצוג המצב יתרונות רבים, כולל תאור נוח ואחיד גם לאותות וקטוריים, וכן מימוש פשוט יחסית. מעבר להגדרה כללית, אנו נדון במשוואות מצב רק עבור מערכות המתוארות על ידי מד"ר לינאריות או משוואות הפרש לינאריות. עבור מערכות כאלו יצוג המצב מאפשר מימוש פשוט יחסית במחשב, טיפול קל במערכות מרובות כניסות ויציאות (MIMO), ושימוש נוח של המערכת כרכיב במערכות מורכבות יותר. במקרים מסויימים יש למשתנים הפנימיים של המערכת משמעות פיזיקלית ברורה. ייצוג מצב מאפשר גם טיפול במערכות לא לינאריות (בהן לא נעסוק) ומשתנות בזמן (בהן נעסוק רק בקצרה). נתחיל בדוגמה של משוואת מצב בזמן רציף. בהמשך ל-(15.0.1).

דוגמה 15.0.4 עבור המערכת

$$\ddot{y} + 2\dot{y} - 4y = x\,. \tag{15.0.2}$$

נגדיר

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}\,. \tag{15.0.3}$$

את המשוואה (15.0.2) אפשר לרשום בצורה הבאה:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \tag{15.0.4}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{15.0.5}$$

נרחיב כעת את הדוגמה למקרה שיש נגזרות גם בצד ימין של המשוואה.

דוגמה 15.0.5 נגדיר כעת מערכת חדשה

$$\ddot{z} + 2\dot{z} - 4z = 2\dot{x} + x\,. \tag{15.0.6}$$

מתכונות מד"ר---טענה *2.2.20* אנו יודעים כי אם y היא התגובה של המערכת (15.0.2) לכניסה x אזי $\dot{y}$ היא התגובה לכניסה $\dot{x}$. ביחד עם תכונת הלינאריות של מד"ר נקבל שאת התגובה של מערכת (15.0.6) לכניסה x אפשר לרשום בצורה $z(t) = 2\dot{y} + y$. לכן נוכל לרשום מייד משוואות מצב עבור המערכת (15.0.6):

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \tag{15.0.7}$$

$$z = q_1 + 2\dot{q}_1 \tag{15.0.8}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}\,. \tag{15.0.9}$$

15.1 משוואות מצב בזמן רציף

מערכת משוואות מצב בזמן רציף מתוארת באופן כללי בצורה הבאה: משוואת התפתחות המצב היא

$$\dot{q}(t) \doteq \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1[q(t), x(t), t] \\ f_2[q(t), x(t), t] \\ \vdots \\ f_N[q(t), x(t), t] \end{bmatrix} \tag{15.1.1}$$

$$= f[q(t), x(t), t] \tag{15.1.2}$$

כאשר q, x, y הם וקטורים ו-f היא פונקציה וקטורית. משוואת היציאה היא

$$y(t) = g[q(t), x(t), t] \tag{15.1.3}$$

עבור פונקציה וקטורית g. תנאי ההתחלה הם

$$q(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_N(0) \end{bmatrix} . \tag{15.1.4}$$

משוואת התפתחות המצב היא משוואה דיפרנציאלית וקטורית מסדר ראשון, כלומר N משוואות דיפר-נציאלית מצומדות מסדר ראשון. ייצוג המצב מאפשר גמישות רבה מאשר נראה במבט ראשון. לדוגמה, נראה כיצד ניתן לייצג מערכת שאינה קבועה בזמן על ידי משוואת מצב ללא תלות מפורשת בזמן.

דוגמה 15.1.1 נגדיר מערכת דרך מד"ר

$$\dot{y} = ay + t + x . \tag{15.1.5}$$

זו כמובן מערכת שאינה קבועה בזמן, ולכן כלי הפתרון הרגילים אינם ישימים. אולם נגדיר

$$q_1(t) = y \tag{15.1.6}$$

$$q_2(t) = t . \tag{15.1.7}$$

נקבל את הייצוג הבא

$$\dot{q}_1(t) = aq_1(t) + q_2(t) + x(t) \tag{15.1.8}$$

$$\dot{q}_2(t) = 1 \tag{15.1.9}$$

$$y(t) = q_1(t) . \tag{15.1.10}$$

או, בצורה וקטורית,

$$\frac{d}{dt}q(t) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q(t) + \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15.1.11}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} q(t) \ . \tag{15.1.12}$$

זוהי משוואת מצב רגילה, לינארית וקבועה בזמן, כאשר את התלות בזמן אנו מייצגים דרך כניסה חדשה. כדי שתגובת מערכת זו תהיה זהה לתגובה של המערכת (15.1.5) יש לקבוע תנאי התחלה $q_2(0) = 0$.

מערכת מצב היא קבועה בזמן (כמערכת כניסה יציאה) אם הפונקציות f, g אינן תלויות באופן מפורש במשתנה הזמן. נשים לב כי תנאי זה אינו הכרחי: למשל עבור המערכת

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ t & t^2 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \tag{15.1.13}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} q \tag{15.1.14}$$

התגובה תלויה רק ב-q_1 והמשוואה עבורו אינה תלויה בזמן.

בצורה דומה, המערכת היא לינארית אם הפונקציות f, g לינאריות במשתנים q, x, אך גם תנאי זה אינו הכרחי. אם הפונקציות הן לינאריות אזי אפשר לרשום את המערכת בצורה

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + B(t)x(t) \tag{15.1.15}$$

$$y(t) = C(t)q(t) + D(t)x(t) \tag{15.1.16}$$

כאשר $A(t), B(t), C(t), D(t)$ הן מטריצות במימד מתאים, אשר באופן כללי יכולות להיות תלויות בזמן. אם המטריצות הן של קבועים (ואינן תלויות בזמן) אזי המערכת היא לינארית וקבועה בזמן. הצורה בה נדון, של מערכת לינארית וקבועה בזמן היא

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bx(t) \tag{15.1.17}$$

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t) \ . \tag{15.1.18}$$

15.2 ייצוג מד"ר על ידי משוואות מצב

בדוגמה 15.0.4 ראינו ייצוג של מד"ר על ידי משוואות מצב. חשוב להדגיש כי ייצוג זה אינו יחיד. נראה כיצד לבנות ייצוג כזה, ונתחיל במערכת הבאה.

$$y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = x \ . \tag{15.2.1}$$

נגדיר

$$q_1 = y \tag{15.2.2}$$

$$q_2 = \dot{q}_1 = y^{(1)} \tag{15.2.3}$$

$$q_3 = \dot{q}_2 = y^{(2)} \tag{15.2.4}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \tag{15.2.5}$$

$$q_N = \dot{q}_{N-1} = y^{(N-1)} \; . \tag{15.2.6}$$

את המשוואה (15.2.1) נוכל לרשום בצורה

$$y^{(N)} = -a_{N-1}y^{(N-1)} - \ldots - a_1 y^{(1)} - a_0 y + x \tag{15.2.7}$$

$$= \dot{q}_N \tag{15.2.8}$$

$$= -a_{N-1}q_N - \ldots - a_1 q_2 - a_0 q_1 + x \tag{15.2.9}$$

ולכן משוואת התפתחות המצב היא

$$\dot{q}_1 = q_2 \tag{15.2.10}$$

$$\dot{q}_2 = q_3 \tag{15.2.11}$$

$$\vdots \tag{15.2.12}$$

$$\dot{q}_{N-1} = q_N \tag{15.2.13}$$

$$\dot{q}_N = -a_{N-1}q_N - \ldots - a_1 q_2 - a_0 q_1 + x \tag{15.2.14}$$

ומשוואת היציאה היא

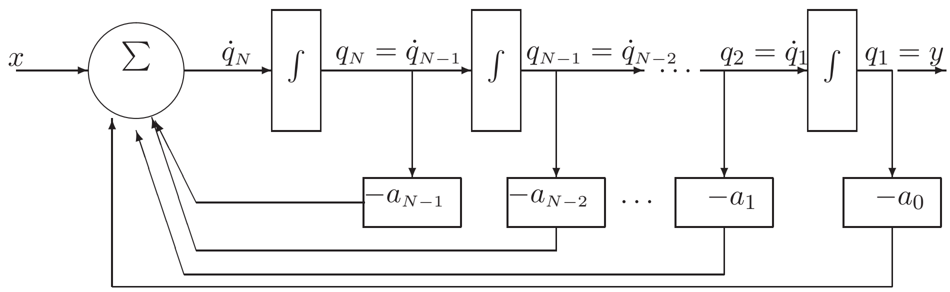
$$y = q_1 \tag{15.2.15}$$

או בצורה של משוואות מצב

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{N-1} \\ \dot{q}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \tag{15.2.16}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} q \; . \tag{15.2.17}$$

אפשר לתאר מימוש סכמתי של מערכת זו בעזרת אינטגרטורים, מכפלים ומסכמים. כיוון שהתחלנו במשוואה מסדר N, אני מצפים שנזדקק ל-N אינטגרטורים. כיוון שבמשוואה מופיעים N קבועים, אנו מצפים שנזדקק לפחות ל-N מכפלים. לבסוף, אנו זקוקים למסכם שיבצע N פעולות חיבור. אם במערכת (15.2.19)



איור 15.2: מימוש מצב עם כניסה ללא נגזרות

נזכר כעת כי מד"ר לינארית מתארת מערכת כניסה-יציאה לינארית, ובנוסף התגובה לנגזרת הכניסה היא נגזרת התגובה: אם Φ הוא מיפוי המערכת אזי

$$\Phi(dx/dt) = d\Phi(x)/dt \tag{15.2.18}$$

(טענה 2.2.20). כלומר, אפשר לרשום ייצוג מצב עבור המד"ר

$$z^{(N)} + a_{N-1}z^{(N-1)} + \ldots + a_1 z^{(1)} + a_0 z = b_{N-1}x^{(N-1)} + \ldots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \tag{15.2.19}$$

בדרך הבאה. נייצג את היציאה בעזרת הפתרון של (15.2.1)

$$z = b_{N-1}y^{(N-1)} + \ldots + b_1 y^{(1)} + b_0 y \ . \tag{15.2.20}$$

בצורה של משוואות מצב נקבל משוואות זהות להתפתחות המצב, אך משוואת יציאה שונה:

$$\begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \\ \vdots \\ \dot q_{N-1} \\ \dot q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \tag{15.2.21}$$

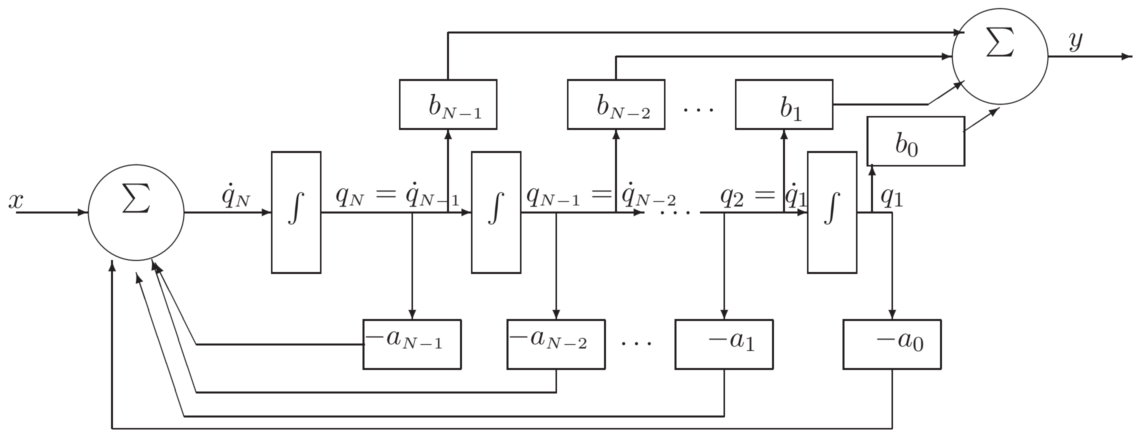
$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} q \ . \tag{15.2.22}$$

כדי לממש מערכת זו נוכל להעזר בהתפתחות המצב של המערכת הקודמת---השינוי הוא רק במשוואת היציאה:

אם במערכת (15.2.19) תופיע גם הנגזרת ה-N של x אזי נצטרך להוסיף במוצא את הנגזרת ה-N של y. אולם בעזרת משוואה (15.2.1) אפשר לייצג זאת בעזרת נגזרות נמוכות יותר של y ובעזרת x. אולם נגזרות נמוכות יותר של y אפשר לייצג בעזרת משתני המצב $\{q_i\}$. אם כך הגענו למסקנה הבאה.

משפט 15.2.1 משוואה דיפרנציאלית מהצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{15.2.23}$$



איור 15.3: מימוש מצב

כאשר $M \leq N$ ו-$a_N \neq 0$ אפשר לייצג בעזרת משוואת מצב מהצורה

$$\dot{q} = Aq + Bx \tag{15.2.24}$$

$$y = Cq + Dx \tag{15.2.25}$$

ובפרט אם $a_N = 1$ אזי את המטריצה A ואת הווקטור B אפשר לקבוע בצורה (15.2.21). אם $N < M$ אזי ניתן לבחור $D = 0$ ואת C לבחור בצורה (15.2.22).

נשים לב כי אם $N > M$ אזי אין ייצוג מצב מהצורה שפיתחנו, משום שאנו זקוקים לביטוי המכיל נגזרות של אות הכניסה x, והביטוי עבור משוואות המצב אינו מאפשר נגזרות כאלו.

הסיבה לניסוח "ניתן לבחור" היא שייצוג המצב אינו יחיד. הייצוג אשר במשוואות (15.2.21)--(15.2.22) נקרא יצוג קנוני מסוג Controllable Canonical Form ונדון במשמעותו בהמשך (לשם טכני זה, כמו גם לשמות אחרים הקשורים בנושאים מתקדמים, אין תרגום לעברית). אולם תחילה נראה כיצד ניתן לקבל ייצוגים שונים לאותה המערכת. עבור מערכת לינארית בייצוג מצב מהצורה (15.1.17)--(15.1.18) נאמר שהמערכת מיוצגת על ידי (A, B, C, D).

משפט 15.2.2 נתון ייצוג במרחב המצב מהצורה

$$\dot{q} = Aq + Bx \tag{15.2.26}$$

$$y = Cq + Dx \tag{15.2.27}$$

כלומר מערכת המיוצגת על ידי (A, B, C, D). תהי T מטריצה הפיכה. אזי אותה המערכת מיוצגת גם על ידי

$$(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)\ . \tag{15.2.28}$$

מרחב המצב   פתרון בכניסה אפס.

כלומר אם נגדיר $z = T^{-1}q$ כך ש-$q = Tz$ אזי מתקיים

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}x \tag{15.2.29}$$

$$\doteq \tilde{A}z + \tilde{B}x \tag{15.2.30}$$

$$y = CTz + Dx \tag{15.2.31}$$

$$\doteq \tilde{C}z + Dx\ . \tag{15.2.32}$$

הערה: כמקרה פרטי, המטריצה T יכולה להיות מטריצה מלכסנת, דבר המקל מאד על פתרון המשוואות--ראה סעיף 15.3. אולם המשפט שימושי באופן כללי יותר. הוכחה: העובדה ש-z מקיימת משוואות אלו נובעת ישירות מהלינאריות של הנגזרת:

$$\dot{z} \doteq \frac{d}{dt}\left(T^{-1}q\right) \tag{15.2.33}$$

$$= T^{-1}\dot{q} \tag{15.2.34}$$

$$= T^{-1}\left(Aq + Bx\right) \tag{15.2.35}$$

$$= T^{-1}\left(ATz + Bx\right) \tag{15.2.36}$$

$$= T^{-1}ATz + T^{-1}Bx\ . \tag{15.2.37}$$

$$y = Cq + Dx \tag{15.2.38}$$

$$= CTz + Dx \tag{15.2.39}$$

וקבלנו את המשוואות הרצויות. נובע מכך כי עבור אותה כניסה x נקבל את אותו מוצא y, ולכן זו אותה מערכת. מ.ש.ל.

טרנספורמציות לינאריות כאלו ישמשו אותנו בהמשך כדי להגיע לצורות נוחות של משוואות המצב. אך חשוב להדגיש כי לעיתים לא ניתן להגיע לצורה הרצויה בעזרת טרנספורמציה כזו.

15.3 פתרון משוואות מצב

נתייחס למשוואות מצב לינאריות וקבועות בזמן

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bx(t) \tag{15.3.1}$$

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)\ . \tag{15.3.2}$$

על התנהגות המצב אפשר להסתכל כתנועה של $q(t)$ לאורך מסלול במרחב N ממדי (באנגלית: trajectory).

15.3.1 פתרון בכניסה אפס

בסעיף זה נחשב התנהגות המצב בכניסה 0, ונתחיל במקרה ש-A היא אלכסונית, כלומר

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \tag{15.3.3}$$

במקרה זה, נגדיר מטריצת מעבר transition matrix כך

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_{N-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} \tag{15.3.4}$$

משפט 15.3.1 נניח ש-A היא אלכסונית ו-$x \equiv 0$. אזי המסלול המתאים לתנאי התחלה $q(0) = q_0$ הוא

$$q(t) = \Phi(t) q_0 \tag{15.3.5}$$

והתגובה של המערכת היא

$$y(t) = Cq(t) \ . \tag{15.3.6}$$

הוכחה: עלינו להוכיח כי מתקיימת משוואת התפתחות המצב. כיוון ש-$x \equiv 0$ הרי המשוואה עבור היציאה היא כנתון במשפט. נבדוק אם כן:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t)q_0 = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}e^{\lambda_{N-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt}e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} q_0 \tag{15.3.7}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{N-1} e^{\lambda_{N-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} q_0 \tag{15.3.8}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_{N-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} q_0 \tag{15.3.9}$$

$$= A\Phi(t)q_0 \ . \tag{15.3.10}$$

כלומר משוואת התפתחות המצב מתקיימת. מ.ש.ל.

המקרה של מטריצה אלכסונית אינו המקרה הכללי כמובן. ננסה אם כן להבין כיצד נראה הפתרון במקרה הכללי. נזכר בייצוג של אקספוננט על ידי טור

$$e^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \ . \tag{15.3.11}$$

נשים לב כי עבור A אלכסונית מתקיים

$$(At)^k = t^kA^k = \begin{bmatrix} t^k\lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t^k\lambda_2^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^k\lambda_{N-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^k\lambda_N^k \end{bmatrix} \tag{15.3.12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^k}{k!}\lambda_2^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^k}{k!}\lambda_{N-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^k}{k!}\lambda_N^k \end{bmatrix} \tag{15.3.13}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda_2^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda_{N-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda_N^k \end{bmatrix} \tag{15.3.14}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_{N-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} \tag{15.3.15}$$

נשתמש בתוצאה זו כדי להגדיר אקספוננט של מטריצה.

הגדרה 15.3.2 מטריצת המעבר *Transition matrix* של מערכת משוואות מצב לינאריות וקבועות בזמן מוגדרת על ידי האקספוננט של המטריצה A כאשר האקספוננט מוגדר על ידי הטור

$$\Phi(t) = e^{At} \tag{15.3.16}$$

$$\doteq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k \;. \tag{15.3.17}$$

ננסה להבין מהיא מטריצת המעבר ומהן תכונותיה. כיוון שקיבלנו ביטוי פשוט במקרה ש- A אלכסונית, נמשיך למקרה בו A אינה אלכסונית אך ניתנת לליכסון.

מרחב המצב   פתרון בכניסה אפס.

משפט 15.3.3 נניח ש-T מלכסנת את A, כלומר

$$T^{-1}AT = \Lambda \tag{15.3.18}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \tag{15.3.19}$$

אזי T מלכסנת גם את Φ, ומתקיים

$$T^{-1}e^{At}T = e^{\Lambda t} \tag{15.3.20}$$

ולכן ניתן לחשב את e^{At} על ידי

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} \ . \tag{15.3.21}$$

נזכר שמטריצה A מסדר N ניתנת לליכסון אם ורק אם יש לה N וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. הטרנספורמציה המעבירה את A למטריצה האלכסונית נקראת טרנספורמצית דמיון.
הוכחה: המטריצה T מלכסנת את A^k כיוון ש-

$$T^{-1}A^kT = T^{-1}ATT^{-1}A^{k-1}T \tag{15.3.22}$$

$$= \Lambda T^{-1}A^{k-1}T \tag{15.3.23}$$

$$= \Lambda^2 T^{-1}A^{k-2}T \tag{15.3.24}$$

$$= \Lambda^k \ . \tag{15.3.25}$$

הטענה נובעת כעת מההגדרה של אקספוננט של מטריצה. מ.ש.ל.

משפט 15.3.4 למטריצה e^{At} יש את התכונות הבאות:

1. $e^{A\cdot 0} = I$, מטריצת היחידה.
2. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.
3. אם $A_1A_2 = A_2A_1$ אזי $e^{A_1t}e^{A_2t} = e^{(A_1+A_2)t}$
4. $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$
5. המטריצה אינה סינגולרית (אפילו אם A סינגולרית).
6. $e^{At_1}e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$.

מרחב המצב פתרון בכניסה אפס.

הוכחה: 1 נובע מההגדרה. לסעיף 2 נרשום את ההגדרה:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k \tag{15.3.26}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{d}{dt}t^k}{k!}A^k \tag{15.3.27}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kt^{k-1}}{k!}A^k \tag{15.3.28}$$

$$= A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} \tag{15.3.29}$$

$$= A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{(k)!}A^k \tag{15.3.30}$$

$$= Ae^{At}\ . \tag{15.3.31}$$

את סעיף 3 ניתן להוכיח מתוך ההגדרה, אולם זו הוכחה מייגעת. נראה זאת מתוך תכונות כלליות של משוואות דיפרנציאליות. נסמן

$$\phi_1(t) \doteq e^{(A_1+A_2)t} \tag{15.3.32}$$

$$\phi_2(t) \doteq e^{A_1 t}e^{A_2 t}\ . \tag{15.3.33}$$

אזי $\phi_1(0) = \phi_2(0) = I$, מטריצת היחידה. מצד שני, לפי כלל השרשרת ותכונה 2, הפונקציות מקיימות את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

$$\frac{d}{dt}\phi_1(t) = (A_1 + A_2)\phi_1(t) \tag{15.3.34}$$

$$\frac{d}{dt}\phi_2(t) = A_1\phi_2(t) + e^{A_1 t}A_2 e^{A_2 t} \tag{15.3.35}$$

כעת $e^{A_1 t}A_2 e^{A_2 t} = A_2 e^{A_1 t}e^{A_2 t}$ אם ורק אם $A_1A_2 = A_2A_1$. אם תנאי זה מתקיים אזי קבלנו

$$\frac{d}{dt}\phi_2(t) = (A_1 + A_2)\phi_2(t)\ . \tag{15.3.36}$$

כלומר $\phi_1(t)$ ו-$\phi_2(t)$ מקיימים את אותה המשוואה עם אותם תנאי התחלה, ולכן הם שווים.

כיוון ש-A מתחלפת עם עצמה נקבל מסעיף 3

$$e^{At}e^{-At} = e^{(A-A)t} = I\ . \tag{15.3.37}$$

סעיף 5 הוא כעת מיידי שכן למטריצה יש הופכית.

בצורה דומה, קל לראות שהמטריצות At_1 ו-At_2 מתחלפות ולכן קבלנו את 6. מ.ש.ל.

הגדרה 15.3.5 המטריצה $\tilde{\Phi}(t,\tau)$ תקרא מטריצת המעבר אם כאשר הכניסה היא אפס, לכל $t \geq \tau$ ולכל מסלול מצב q מתקיים

$$q(t) = \tilde{\Phi}(t,\tau)q(\tau)\ . \tag{15.3.38}$$

מקור השם הוא ברור: המטריצה מעבירה את המצב (על ידי פעולה אלגברית---כפל במטריצה) ממצבו ברגע τ למצב ברגע t. עבור מערכות לינאריות קבועות בזמן כבר מצאנו מטריצה זו.

משפט 15.3.6 עבור המערכת (15.3.1)--(15.3.2) מתקיים $\tilde{\Phi}(t,\tau) = \Phi(t-\tau)$.

הוכחה: ראשית, כיוון שהמערכת קבועה בזמן מספיק להוכיח כי עבור כל q_0 מתקיים $q(t) = \Phi(t)q_0$. אולם זה מיידי כיוון ש-$\Phi(t)q_0 = e^{At}q_0$ מקיימת את משוואת ההתפתחות של המצב, וברגע 0 מתקיים $\Phi(0)q_0 = q_0$. מ.ש.ל.

קיבלנו אם כן פתרון בכניסה אפס. פתרון זה מאפשר לחשב את הפתרון הכללי.

15.3.2 פתרון כללי

כמו בפתרון של משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון, הפתרון הכללי (כאשר הכניסה אינה מתאפסת) מתקבל דרך אינטגרל. כפי שנגזרת של וקטור היא, בהגדרתה, הוקטור המתקבל מגזירת כל איבר בנפרד, כך ההגדרה של אינטגרל של מטריצה הוא--זוהי המטריצה המתקבלת מביצוע אינטגרל על כל אחד מהאברים בנפרד.

משפט 15.3.7 הפתרון של מערכת משוואות המצב (15.3.1) הוא

$$q(t) = e^{At}q_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)\,d\tau \ . \tag{15.3.39}$$

האיבר הראשון בצד ימין הוא כמובן הפתרון בכניסה אפס, והאיבר השני הוא הפתרון בתנאי התחלה אפס.

הוכחה: נפעיל את חוקי הגזירה הרגילים:

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{At}q_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)\,d\tau\right] \tag{15.3.40}$$

$$= \frac{d}{dt}e^{At}q_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)\,d\tau \tag{15.3.41}$$

$$= Ae^{At}q_0 + \frac{d}{dt}\left[e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bx(\tau)\,d\tau\right] \tag{15.3.42}$$

$$= Ae^{At}q_0 + Ae^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bx(\tau)\,d\tau + e^{At}e^{-At}Bx(t) \tag{15.3.43}$$

$$= A\left[e^{At}q_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bx(\tau)\,d\tau\right] + Bx(t) \tag{15.3.44}$$

$$= Aq(t) + Bx(t) \ . \tag{15.3.45}$$

כמובן שנוסחה זו אינה קלה במיוחד לחישוב, כיוון שראינו כי באופן כללי החישוב של e^{At} אינו פשוט. כמו במקרה של מד"ר, נראה בהמשך כי חישוב דרך התמרת לפלס הוא במקרים רבים נוח יותר.

15.4 צורות קנוניות

ראינו כי במידה וניתן ללכסן את המטריצה A אזי החישוב של e^{At} הוא פשוט למדי. לצורה האלכסונית יתרונות נוספים: אם A היא אלכסונית אזי פתרון המשוואות הוא בעצם פתרון של N משוואות מסדר

ראשון. יש צורך ב-N אינטגרלים ולכל היותר N פעולות חיבור ו-N פעולות כפל לצורך פתרון משוואות המצב, ופתרון עבור היציאה דורש לכל היותר N פעולות חיבור ו-N פעולות כפל נוספות. אולם לא תמיד ניתן ללכסן מטריצות (בפרט כאשר ערכים עצמיים הם בריבוי גדול מ-1).

יתרון חשוב של ייצוג ה-Controllable canonical form הוא שגם כאן, כדי לפתור מערכת מסדר N יש צורך ב-N אינטגרטורים וכן לכל היותר N מכפלים ו-N מסכמים. ליצוג זה יתרון נוסף, ממנו נובע שמו.

הגדרה 15.4.1 מערכת מצב נקראת *state controllable* אם לכל t_0 , לכל ערך $q(t_0)$ של המצב, לכל $t_1 > t_0$ ו-q_1 קיימת כניסה $\{x(t),\ t_0 \leq t \leq t_1\}$ כך ש-$q(t_1) = q_1$.

משפט 15.4.2 (ללא הוכחה---ראה קורס בבקרה). אם A, B הם בצורת *Controllable Canonical Form* אזי המערכת היא *State controllable*.

מסקנה: אם קיימת טרנספורמציה T המביאה את המערכת לצורה זו, אזי המערכת היא State controllable.

משפט 15.4.3 הצורה הקנונית של ג'ורדן *Jordan Canonical Form*. כל מערכת המתוארת על ידי A, B, C, D ניתן להמיר על ידי טרנספורמציה מתאימה לצורה של ג'ורדן:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix} \tag{15.4.1}$$

כאשר ה-0 הן מטריצות של אפסים במימד מתאים, וכל מטריצה A_n היא מהצורה

$$A_n = \begin{bmatrix} \lambda_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{15.4.2}$$

k הוא מספר הוקטורים העצמיים בלתי תלויים של A.

נשים לב שבדומה לצורה האלכסונית, משוואות המצב מתפרקות לקבוצות כאשר אין השפעה של קבוצה אחת על רעותה. גם כאן סיבוכיות המימוש דומה.

15.5 שיטות התמרה---לפלס

התמרת לפלס לווקטור (או למטריצה) היא התמרה של כל איבר בנפרד. תחת הגדרה זו, התמרה של משוואות המצב היא פשוטה. נבצע התמרה חד צדדית של המשוואה

$$\dot{q}(t) = Aq(t) + Bx(t) \tag{15.5.1}$$

עם תנאי התחלה $q(0^-)$. התמרה חד צדדית נותנת

$$sQ_+(s) - q(0^-) = AQ_+(s) + BX_+(s) \tag{15.5.2}$$

$$sQ_+(s) - AQ_+(s) = BX_+(s) + q(0^-) \tag{15.5.3}$$

$$Q_+(s) = (sI - A)^{-1}BX_+(s) + (sI - A)^{-1}q(0^-) \tag{15.5.4}$$

וקיבלנו שוב חלוקה כאשר האיבר הראשון בצד ימין הוא תגובת המצב בתנאי התחלה אפס, והאיבר השני הוא תגובה בכניסה אפס. נציב במשוואה עבור יציאת המערכת ונקבל

$$Y_+(s) = CQ_+(s) + DX_+(s) \tag{15.5.5}$$

$$= [C(sI - A)^{-1}B + D]X_+(s) + C(sI - A)^{-1}q(0^-) \tag{15.5.6}$$

וגם כאן האיבר הראשון הוא התגובה בתנאי התחלה אפס, והאיבר השני הוא תגובה בכניסה אפס. מכאן נסיק שפונקצית התמסורת של המערכת היא

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \ . \tag{15.5.7}$$

כיוון שדרשנו שפונקצית תמסורת תהיה אחרי צימצום בין שרשי המונה והמכנה, יש לבצע צמצום כזה גם כאן כדי לקבל את פונקצית התמסורת. אם x ו-y הם סקלרים אזי $H(s)$ גם היא פונקציה סקלרית (חד ממדית) של s. כיוון שהיא מתקבלת על ידי היפוך של מטריצה שהיא לינארית ב-s נובע כי H היא פונקציה רציונלית. לכן אפשר לרשום מד"ר אשר מתארת את מערכת הכניסה-יציאה. מצאנו דרך להפוך יצוג משתני מצב למד"ר---דרך התמרת לפלס. כמובן שאם היה צמצום של קטבים ואפסים אזי המימד (הנגזרת הגבוהה ביותר) של המד"ר יהיה קטן מהמימד (מימד המטריצה A) של ייצוג המצב.

התמרת לפלס נותנת לנו דרך לחשב את המטריצה $\Phi(t) = e^{At}$. ראינו כי המטריצה מקיימת מד"ר

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t) \tag{15.5.8}$$

כאשר $\Phi(0) = I$. התמרת לפלס חד צדדית תתן

$$s\Phi(s) - \Phi(0) = A\Phi(s) \tag{15.5.9}$$

$$(sI - A)\Phi(s) = I \tag{15.5.10}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \ . \tag{15.5.11}$$

משמעות חישוב זה היא הפיכת מטריצה, ולאחר מכן ביצוע התמרת לפלס הפוכה איבר איבר על מנת לקבל את אברי המטריצה e^{At}.

מצורת החישוב של $(sI-A)^{-1}$ ברור כי הקטבים של המערכת הם בדיוק הערכים העצמיים של המטריצה A (למעט ערכים עצמיים שהצטמצמו). המשוואה $\det(sI-A)$ היא בדיוק המשוואה האפיינית של המערכת. מכאן שאת התנהגות המערכת, כולל נושאי יציבות אסימפטוטית ויציבות BIBO, אפשר להסיק מתוך הערכים העצמיים של A: הערכים העצמיים של A הם שורשי הפולינום האפייני ומלמדים על יציבות BIBO, וכל על יציבות מסוג שונה. נשים לב כי אם כל הערכים העצמיים של A נמצאים בצד שמאל של המישור המרוכב, אזי מתוך הפתרון הכללי (15.3.39) נקבל שעבור כל כניסה חסומה, המצב יהיה חסום. סוג זה של יציבות חשוב כדי לוודא שמלבד הכניסה, גם רכיבי המערכת לא יחרגו במחום העבודה התקין שלהם.

15.5.1 משוב מצב

נושא המשוב הוא חשוב ורחב, אך אינו חלק מקורס זה. ניתן לכן רק דוגמה הממחישה את חשיבותו. כדי להעביר את הרעיון המרכזי נתבונן במערכת מצב בייצוג Controllable Canonical Form (15.2.21) ונניח שיש לנו גישה (כלומר ניתן למדוד) את המצב בכל רגע. את הפיתוח להלן ניתן לבצע בתנאים פחות מחמירים, אולם כאמור הנושא הוא מעבר לחומר של קורס זה. נבחן את השאלה הבאה.

ההתנהגות הרצויה של המערכת מתוארת על ידי המטריצה $\tilde{A}\neq A$ אשר גם היא בצורה Controllable Canonical Form (15.2.21). האם ניתן (מבלי כמובן לשנות את המערכת עצמה) לגרום לכך שתתנהג בצורה הרצויה? כלומר האם ניתן לגרום לכך שהמערכת תתנהג כאילו המקדמים a_n של המטריצה A הוחלפו במקדמים אחרים שבחרנו $\tilde{a}_n$? למשל, יתכן ול-A יש ערכים עצמיים בצד ימין, הגורמים לחוסר יציבות. מה ניתן לעשות בנידון?

משוב משמעותו שאנו מודדים את ערכי מצב המערכת, מעבדים אותם ומחזירים אותם ככניסה למערכת. נעשה זאת בצורה הבאה. נוסיף לכניסה x צרוף לינארי של ערכי המצב: נגדיר

$$r(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\hat{a}_n q_n(t) \tag{15.5.12}$$

כאשר את המקדמים $\hat{a}_n$ נגדיר מייד. המערכת שנקבל תהיה אם כך

$$\dot{q}=Aq+B(r+x) \tag{15.5.13}$$
$$=Aq+B\left(\sum_{n=0}^{N-1}\hat{a}_n q_n\right)+Bx \tag{15.5.14}$$
$$=\breve{A}q+Bx \tag{15.5.15}$$
$$y=Cq+Dx\ . \tag{15.5.16}$$

המטריצה $\breve{A}$ היא בצורה (15.2.21) כאשר אברי השורה האחרונה הם $\hat{a}_n-a_n$. כעת נבחר $\hat{a}_n=\tilde{a}_n+a_n$. נקבל כי $\breve{A}=\tilde{A}$ ולכן משוואות המצב הן

$$\dot{q}=\tilde{A}q+x \tag{15.5.17}$$
$$y=Cq+Dx\ . \tag{15.5.18}$$

כלומר בעזרת משוב מצב קיבלנו שהתנהגות המערכת השתנתה לצורה הרצויה.

המסקנה היא שאם ביכולתנו להפעיל משוב מצב אזי אפשר לשנות את התנהגות המערכת כרצוננו!

חשוב לשים לב להבדל בין שינוי המערכת לבין שימוש במשוב. יתכן שהמערכת היא קופסה סגורה, ואולי מערכת מכנית. אם הכניסה למערכת היא אותות חשמליים, אזי משמעות המשוב היא מימוש מעגל חשמלי שימדוד את משתני המצב, וישנה את אות הכניסה. שינוי התנהגות המערכת נעשה על ידי שינוי אות הכניסה ולא על ידי שינוי במבנה המערכת.

לדוגמה, משיקולים אוירודינמיים מסתבר שתכנון מסויים של מערכת ההגוי של מטוס מביא ליעילות אוירודינמית משמעותית, אך גורם לחוסר יציבות של המטוס. חוסר יציבות זה מביא לכך שטייס אינו יכול לשלוט על המטוס. הפתרון הוא דרך משוב: מערכת אלקטרונית גורמת לכך שהקשר בן כניסה (הפעלת ההגאים על ידי הטייס) למוצא (התנהגות המטוס) יהיה מערכת יציבה ולכן ברת שליטה. מצד שני, התכנון האוירודינמי לא השתנה, דבר המביא לשיפור ביעילות המטוס. שיטה זו יושמה לראשונה במטוס הקרב F-16.

15.6 משוואות מצב בזמן בדיד

משוואת התפתחות המצב בזמן בדיד היא

$$q(n+1) = \begin{bmatrix} f_1[q(n), x(n), n] \\ f_2[q(n), x(n), n] \\ \vdots \\ f_N[q(n), x(n), n] \end{bmatrix} \tag{15.6.1}$$

$$= f[q(n), x(n), n] \tag{15.6.2}$$

כאשר q, x, y הם וקטורים ו-f היא פונקציה וקטורית. משוואת היציאה היא

$$y(n) = g[q(n), x(n), n] \tag{15.6.3}$$

עבור פונקציה וקטורית g. תנאי ההתחלה הם

$$q(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_N(0) \end{bmatrix} . \tag{15.6.4}$$

משוואת התפתחות המצב היא משוואת הפרשים וקטורית מסדר ראשון, כלומר N משוואות הפרש מצומדות מסדר ראשון.

15.7 ייצוג מ"ה על ידי משוואות מצב

נתחיל בניתוח המערכת הבאה:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \sigma^n y(t) = x(t) \tag{15.7.1}$$

כאשר σ הוא אופרטור ההזזה קדימה: $\sigma y(t) = y(t+1)$. נשים לב כי ייצוג זה אינו הייצוג הסטדנרטי בו השתמשנו בדיון אודות משוואות הפרש, אולם כפי שראינו בסעיף 12.5.1 ובפרט במשוואות (12.5.35)--(12.5.36) הייצוגים שקולים. למען הנוחיות נניח כי $a_N = 1$, ואז נרשום את המשוואה בצורה

$$y(t+N) = -a_0 y(t) - a_1 y(t+1) - a_2 y(t+2) - \ldots - a_{N-1} y(t+N-1) + x(t) \tag{15.7.2}$$

נגדיר

$$q_1(t) = y(t) \tag{15.7.3}$$

$$q_2(t) = q_1(t+1) = y(t+1) \tag{15.7.4}$$

$$q_3(t) = q_2(t+1) = y(t+2) \tag{15.7.5}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \tag{15.7.6}$$

$$q_N(t) = q_{N-1}(t+1) = y(t+N-1)\ . \tag{15.7.7}$$

את המשוואה (15.7.1) (כאשר $a_N = 1$) נוכל לרשום בצורה

$$y(t+N) = -a_0 y(t) - a_1 y(t+1) - \ldots - a_{N-1} y(t+N-1) + x(t) \tag{15.7.8}$$

$$q_N(t+1) = -a_0 q_1(t) - a_1 q_2(t) - \ldots - a_{N-1} q_N(t) + x(t) \tag{15.7.9}$$

ונקבל משוואת מצב בצורה

$$q(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{N-2} & -a_{N-1} \end{bmatrix} q(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \tag{15.7.10}$$

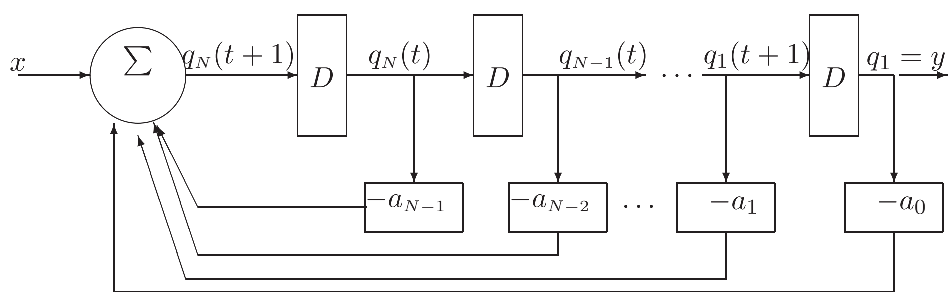
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} q(t)\ . \tag{15.7.11}$$

קבלנו משוואת מצב בצורה

$$q(t+1) = Aq(t) + Bx(t) \tag{15.7.12}$$

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t) \tag{15.7.13}$$

שהיא צורה זהה למשוואות מצב בזמן רציף.



איור 15.4: מימוש מצב עם כניסה ללא השהיה

תיאור סכמתי או מימוש של משוואות מצב אלו הוא זהה לזמן רציף, פרט לעובדה שיחידות האינטגרטורים מוחלפות ביחידות השהיה $D = \sigma^{-1}$ והנגזרות מוחלפות בקידום זמן. האיור להלן הוא עבור כניסה ללא השהיות: ההרחבה לכניסה כללית היא בדיוק כמו בזמן רציף.

כמו בזמן רציף אפשר לטפל במקרה בו הכניסה כוללת הזזות של אות הכניסה, תוך שימוש בעובדה כי המערכת קבועה בזמן ולינארית, כך שהתגובה לקבוע כפול כניסה מוזזת מתבטאת בכפל בקבוע והזזת התגובה. הצורה הכללית נשארת כמו ב-(15.7.12)--(15.7.13). הצורה של המטריצות A, B, C היא בדיוק כמו ב-(15.2.21)--(15.2.22) שכן כפי שראינו מתקבלת צורה זהה של A, B והצורה של C נגזרת מהלינאריות. לסיכום

משפט 15.7.1 משוואת הפרש מהצורה

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \sigma^n y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m \sigma^m x(t) \tag{15.7.14}$$

כאשר $N \leq M$ ו-$a_N \neq 0$ אפשר לייצג בעזרת משוואת מצב מהצורה

$$\sigma q = Aq + Bx \tag{15.7.15}$$

$$y = Cq + Dx \tag{15.7.16}$$

ובפרט אם $a_N = 1$ אזי את המטריצה A ואת הווקטור B אפשר לקבוע בצורה (15.2.21). אם $M < N$ אזי ניתן לבחור $D = 0$ ואת C לבחור בצורה (15.2.22).

משמעות התנאי $N \leq M$ ו-$a_N \neq 0$ היא שהמערכת סיבתית---השווה למשמעות התנאי בזמן רציף.

15.7.1 פתרון במישור הזמן

כמו במשוואות הפרש, את משוואות המצב בזמן בדיד אפשר לפתור בצורה מפורשת במישור הזמן בצורה הבאה:

$$q(n) = Aq(n-1) + Bx(n-1) \tag{15.7.17}$$

$$= A[Aq(n-2) + Bx(n-2)] + Bx(n-1) \tag{15.7.18}$$

$$= A^2 q(n-2) + ABx(n-2) + Bx(n-1) \tag{15.7.19}$$

$$= A^3 q(n-3) + A^2 Bx(n-3) + ABx(n-2) + Bx(n-1) \tag{15.7.20}$$

ולכן

$$q(n) = A^n q(0) + \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} Bx(n-k) \ . \tag{15.7.21}$$

משפט 15.7.2 עבור משוואת מצב בזמן בדיד (15.7.12)--(15.7.13) מטריצת המעבר נתונה על ידי

$$\Phi(t) = A^t \tag{15.7.22}$$

והפתרון הכללי של המשוואה נתון על ידי (15.7.21).

15.8 התמרת Z

נבצע התמרה חד צדדית של המשוואה

$$q(t+1) = Aq(t) + Bx(t) \tag{15.8.1}$$

עם תנאי התחלה $q(0)$. התמרה חד צדדית נותנת

$$zQ_+(z) - zq(0) = AQ_+(z) + BX_+(z) \tag{15.8.2}$$

$$zQ_+(z) - AQ_+(z) = BX_+(z) + zq(0) \tag{15.8.3}$$

$$Q_+(z) = (zI - A)^{-1} BX_+(z) + (zI - A)^{-1} zq(0) \tag{15.8.4}$$

וקיבלנו נוסחאות זהות לזמן רציף. האיבר הראשון בצד ימין הוא תגובת המצב בתנאי התחלה אפס, והאיבר השני הוא תגובה בכניסה אפס. נציב במשוואה עבור יציאת המערכת ונקבל

$$Y_+(z) = CQ_+(z) + DX_+(z) \tag{15.8.5}$$

$$= [C(zI - A)^{-1} B + D] X_+(z) + C(zI - A)^{-1} zq(0) \tag{15.8.6}$$

וגם כאן האיבר הראשון הוא התגובה בתנאי התחלה אפס, והאיבר השני הוא תגובה בכניסה אפס. מכאן נסיק שפונקצית התמסורת של המערכת היא

$$H(z) = C(zI - A)^{-1} B + D \ , \tag{15.8.7}$$

כמובן אחרי צימצום בין שרשי המונה והמכנה.

כמו בזמן רציף ברור אם כן שהערכים העצמיים של המטריצה A קובעים את תכונות היציבות של המערכת, כולל יציבות המצב ביחס לכניסה. כלומר המערכת יציבה אסימפטוטית אם כל הערכים העצמיים הם בתוך מעגל היחידה, ותכונה זו מבטיחה גם יציבות BIBO. זה לא תנאי הכרחי בגלל האפשרות של צמצום קטבים ואפסים.

גם כאן ניתן להגדיר משוב באותה צורה, וכך לשלוט על מיקום קטבי המערכת.